Quelques Aspects Théoriques d'une Approche Algébrique en Musique

Moreno Andreatta

Résumé : Nous reprenons ici quelques éléments que nous avons développés dans le cadre d'une thèse en musicologie computationnelle intitulée « Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX^{e} siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels » [6]. Au-delà d'une étude historique, qui vise à retracer l'émergence du concept de structure algébrique en musique et musicologie du XX^{e} siècle, la thèse analyse également quelques problèmes théoriques en musique susceptibles d'intéresser aussi bien les musicologues et les compositeurs que les mathématiciens et les informaticiens. À la différence de l'approche traditionnelle dans l'étude des rapports entre mathématiques et musique, consistant à discuter l'application d'outils mathématiques au domaine musical, nous avons choisi de partir de quelques problèmes mathématiques posés par la théorie de la musique, l'analyse musicale et la composition afin d'essayer de mettre en évidence la place singulière des méthodes algébriques dans la musicologie du XX^{e} siècle. Nous en analysons ici quelques aspects.

Introduction

L'utilisation des méthodes algébriques en musique met en œuvre trois aspects qui sont souvent étroitement liés : aspects théoriques, analytiques et compositionnels. Dans notre travail, nous avons proposé de les séparer afin de mettre en évidence leurs propres modes de fonctionnement, à la fois musical et musicologique. Mais nous avons également insisté à plusieurs reprises sur le caractère très limitatif d'une telle catégorisation qui prétendrait définir les champs possibles d'application de toute méthode algébrique à la musique ou à la musicologie. Il est bien connu qu'au XX^{e} siècle, théorie musicale, analyse et composition sont des disciplines qui s'influencent mutuellement. Toute tentative de séparer ces trois domaines se heurte à des difficultés qui sont particulièrement frappantes dans le cas de l'approche algébrique.

Une analyse historique de l'émergence de l'approche algébrique en musique met en évidence la place centrale occupée par certains compositeurs/théoriciens qui n'ont pas hésité à proposer des applications analytiques de leurs démarches théoriques et compositionnelles. Trois compositeurs/théoriciens sont emblématiques en ce qui concerne la réflexion théorique sur la musique, non seulement dans ses ramifications analytiques et compositionnelles, mais aussi dans son caractère éminemment algébrique. Milton Babbitt aux Etats-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est représentent une « trinité » de compositeurs/théoriciens, l'algèbre étant l'élément unificateur de leur pensée théorique, analytique et compositionnelle. Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique du tempérament égal. Plus précisément, ils ont mis en évidence la notion mathématique de *groupe* en tant que concept unificateur de leur pensée théorique.

Ces trois démarches théoriques ont eu également des influences directes dans l'analyse musicale. Aux Etats-Unis, les idées de Milton Babbitt sont à la base de la *Set Theory*, une démarche analytique dont certains développements récents, notamment autour de la « théorie transformationnelle » de David Lewin, ont poussé la formalisation algébrique très loin des idées originaires. Dans le cas d'Anatol Vieru, les ressemblances avec la *Set Theory* ont été mises en évidence par le compositeur lui-même qui a discuté à plusieurs reprises l'importance d'une démarche algébrique en théorie et analyse musicale [30].

À la différence des deux compositeurs précédents, une application analytique des théories algébriques proposées par Iannis Xenakis à partir de la « théorie des cribles », change radicalement la notion d'analyse musicale en ouvrant le champ à ce que l'on appelle désormais « l'analyse musicale assistée par ordinateur » (AAO). Plus récemment, l'implémentation de nombreux outils théoriques d'aide à l'analyse musicale dans un langage de programmation visuelle tel qu'*OpenMusic*[1] ouvre le problème de la calculabilité d'une théorie musicale et transforme, progressivement, la nature même de la musicologie en tant que discipline relevant (principalement) des sciences humaines. L'approche algébrique, et son implémentation en *OpenMusic*, ajoute l'élément computationnel au caractère « systématique » de la musicologie, telle qu'elle s'est constituée vers la fin du XIX^{e} siècle. En particulier, les méthodes algébriques permettent de résoudre, d'une façon très élégante, certains problèmes classiques concernant l'énumération et la classification des structures musicales, en généralisant à toute division égale de l'octave les tables de classification d'accords existantes. Ces techniques peuvent également se généraliser à d'autres paramètres que les hauteurs (en particulier les structures rythmiques). Cela correspond aussi à une préoccupation majeure des trois compositeurs/théoriciens précédents qui ont tous proposé des lectures algébriques différentes de la relation existant entre l'espace des hauteurs et l'espace des rythmes. Cet aspect sera developpé dans la section 4.

Toutes ces approches reposent sur des cadres conceptuels relativement élémentaires d'un point de vue mathématique car la structure algébrique sous-jacente est fondamentalement une structure de *groupe* (cyclique, dihédral, affine, symétrique). Cependant, des méthodes catégorielles développées par le mathématicien et théoricien suisse Guerino Mazzola offrent à la musicologie computationnelle un énorme pouvoir d'abstraction et de formalisation. Et si la généralisation de la *Set Theory* américaine par David Lewin et le modèle théorique proposé par Guerino Mazzola se rejoignent en postulant la primauté de la notion de « transformation » sur celle d'« objet musical », ce changement de perspective, qui est implicite dans toute démarche algébrique, est riche de conséquences philosophiques, car il ouvre une question fondamentale sur le rapport entre « objets mathématiques » et « structures musicales »: Nous reviendrons dans la partie conclusive sur ces considérations philosophiques qui semblent dessiner un nouveau paysage pour la recherche « mathémusicale » contemporaine.

1. Formalisation et représentation des structures musicales

À partir des propositions théoriques de Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru, il est possible de placer le problème de la formalisation et représentation des structures musicales à l'intérieur d'une discussion sur la musicologie systématique. Cela offre la possibilité de mieux montrer la double portée musicale et musicologique de la démarche algébrique. En effet, l'étude des aspects théoriques des méthodes algébriques en musique et musicologie soulève une double question. Tout d'abord, d'un point de vue musicologique, une telle

[1] Ce langage de programmation, développé par l'Equipe Représentations Musicales de l'Ircam [7], était initialement conçu pour la composition assistée par ordinateur mais il est de plus en plus employé comme outil analytique, comme nous aurons l'occasion de montrer en présentant l'approche paradigmatique en ce qui concerne la classification d'accords et des rythmes développée dans la librairie *OMGroups*.

réflexion demande une enquête autour de la nature systématique de la discipline. Il s'agit donc de remonter aux sources d'une telle démarche en musicologie, aussi bien en Europe [2] qu'aux Etats-Unis [29]. Deuxièmement, il est possible de discuter l'articulation entre musicologie et réflexion théorique sur la musique, en particulier autour de la naissance, aux Etats-Unis, du concept de théorie de la musique au sens moderne (*music theory*).

Cette réflexion s'avère nécessaire pour comprendre la portée musicologique du problème de la formalisation algébrique des structures musicales et de leurs représentations. Les deux figures suivantes montrent deux exemples de représentation algébrique du système tempéré traditionnel : la représentation circulaire et la représentation toroïdale. Les deux représentations sont équivalentes d'un point de vue mathématique (Théorème de Sylow) mais elles n'ont pas été intégrées au même titre dans les propositions théoriques développées au cours du XX$^{\text{e}}$ siècle. Dans le cas de la représentation circulaire, l'hypothèse sous-jacente est celle qui permet de formaliser tout accord musical (dans une division de l'octave musicale en un nombre n de parties égales) comme un sous-ensemble d'un groupe cyclique d'ordre n. Tout accord de m notes (distinctes, modulo l'octave) peut donc se représenter d'un point de vue géométrique comme un m-polygone inscrit dans un cercle et l'on peut lui associer de façon unique une suite de nombres entiers qui comptent les intervalles successifs dans l'accord (*structure intervallique*). Une telle structure est un *invariant* qui permet d'identifier de façon unique un accord et ses transpositions (musicales), celles-ci étant des rotations du polygone inscrit dans le cercle d'un multiple de $\frac{2\pi}{n}$ (où n est l'ordre du groupe cyclique). La représentation circulaire et la structure intervallique de l'accord de *do* majeur sont données en figure 1.

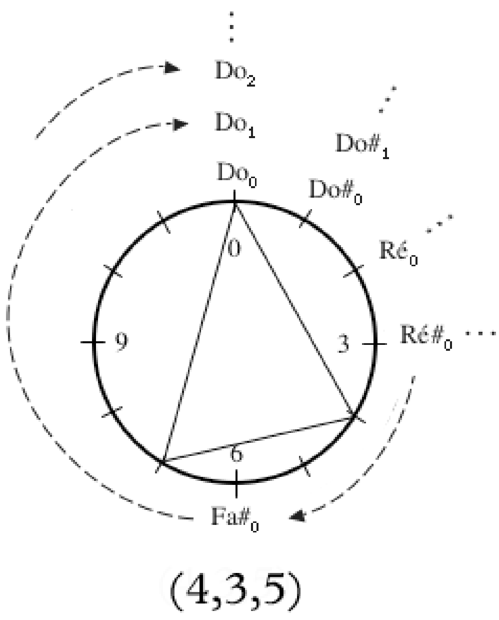

Fig. 1 – Représentation circulaire et structure intervallique

Une représentation géométrique alternative de l'espace tempéré à douze degrés est donnée par le tore, une structure qui utilise, comme nous l'avons mentionné, un théorème de décomposition du groupe cyclique $\mathbf{Z/12Z}$ dans le produit de $\mathbf{Z/3Z}$ et $\mathbf{Z/4Z}$. La construction de la représentation toroïdale du tempérament est décrite en figure 2.

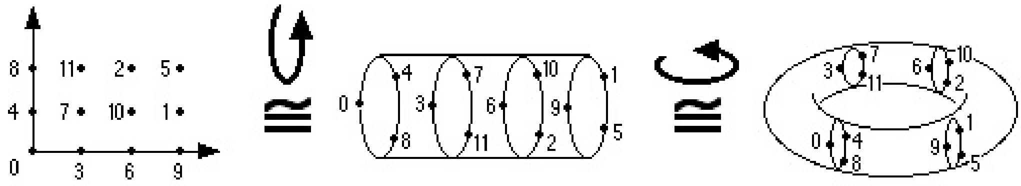

Fig. 2 – Représentation toroïdale de **Z/12Z**

La discussion sur l'articulation entre la notion de formalisation et celle de représentation met en évidence une singularité de la démarche algébrique par rapport à d'autres approches formalisées en théorie musicale. Traditionnellement, la représentation précède la formalisation, au sens que l'on formalise ce que l'on sait déjà représenter. Dans le cas de la démarche algébrique, la représentation circulaire aussi bien que la représentation toroïdale sont plutôt les résultats d'une formalisation qui montre la possibilité d'associer de façon naturelle à toute division bien tempérée de l'octave une structure algébrique de groupe cyclique à laquelle on peut appliquer des théorèmes d'algèbre qui permettront d'aboutir à d'autres types de représentations[2].

2. Autour de l'idée de « structure » en mathématiques et en musique

Une enquête parallèle autour de certaines étapes de la pensée algébrique en mathématiques s'avère donc nécessaire pour bien articuler la réflexion sur le rapport entre formalisation et représentation des structures musicales. En même temps elle permet de mieux comprendre la place des trois compositeurs/théoriciens étudiés, par rapport au problème de l'émergence de l'idée de structure algébrique en musique. En effet, l'histoire des mathématiques montre que, presque à la même époque que la réflexion de Guido Adler sur le caractère systématique de la recherche musicologique, les mathématiciens ouvraient une réflexion qui dépassera largement le cadre de leur propre discipline.

Notre regard rétrospectif sur les étapes de la pensée algébrique en mathématiques a mis en évidence certains éléments qui ont représenté, historiquement, le point de départ d'une réflexion théorique sur les fondements algébriques de la musique, une réflexion que l'on peut articuler autour de la formalisation et des représentations des structures musicales. Pour cela, nous avons d'abord analysé l'évolution du concept de structure algébrique à partir du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein (1872) jusqu'aux développements les plus récents sur la théorie mathématique des catégories, en passant par l'axiomatique hilbertienne et l'expérience Bourbakiste, deux moments de la pensée mathématique contemporaine qui ont influencé de façon décisive la naissance et l'évolution de la théorie de la musique au sens moderne. Cela permet notamment de comprendre la nature algébrique de certaines orientations formelles en analyse musicale, en particulier en ce qui concerne la *Set Theory* américaine (en tant que discipline musicologique issue des idées des théoriciens tels que Milton Babbitt, Allen Forte et David Lewin). Nous allons en reprendre quelques aspects computationnels liés à la formalisation algébrique des structures micro-intervalliques dans la prochaine section.

[2]Le théoricien américain Robert Peck a récemment proposé une représentation topologique du *Tonnetz* à l'aide de la bouteille de Klein qui ouvre des applications musicales tout-à-fait nouvelles. Voir [25].

Notons cependant que, d'un point de vue historique, l'utilisation des méthodes algébriques en musique concerne tout d'abord la théorie de la musique et la composition, l'application analytique n'ayant pris un caractère systématique, de façon explicite qu'avec la théorie transformationnelle de David Lewin. Citons a ce propos l'un des problèmes musicaux qui a le plus fasciné à la fois théoriciens de la musique, compositeurs et mathématiciens : celui de la classification des séries dodécaphoniques tous-intervalles. Ces séries ont la propriété remarquable de contenir tous les intervalles entre les notes successives (sauf l'intervalle 0 qui n'est pas autorisé car une série dodécaphonique n'admet pas de répétition de notes). Généralement, on considère l'ouvrage *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik* d'Herbert Eimert [12] comme la première étude systématique des propriétés des séries dodécaphoniques tous-intervalles, car il contient le catalogue complet des 1928 séries ayant cette propriété remarquable. Cependant, au-delà de l'exhaustivité, la démarche d'Eimert ne semble pas donner une indication précise sur la stratégie employée dans l'établissement d'un tel catalogue. Les recherches menées presque à la même époque par André Riotte en France puis par Robert Morris et Daniel Starr aux Etats-Unis ont permis de mieux comprendre le caractère algébrique sous-jacent à un tel problème théorique, tout en gardant l'aspect « computationnel » de la démarche telle que Eimert l'avait envisagée. Cependant, contrairement à ce que l'on pense habituellement, le problème d'établir des séries tous-intervalles n'est pas lié à l'origine à la technique dodécaphonique. Le traité de modulation du compositeur danois Thorvald Otterström [23] offre en effet un catalogue exhaustif des séries tous-intervalles établies à partir de considérations algébriques sur la nature combinatoire du système tempéré, mais sans aucune référence à la technique sérielle. L'analyse des stratégies théoriques développées dans cet ouvrage nous offre un bon exemple de formalisation algébrique d'un problème musical qui a émergé de considérations différentes de celles qui s'imposeront par la suite dans la recherche musicale.

3. Aspects *set-théoriques* : la place des méthodes algébriques dans l'analyse musicale au XX$^{\text{e}}$ siècle

Dans cette section nous allons expliciter un peu plus en détail quelques aspects analytiques des méthodes algébriques en musicologie, dans leurs articulations profondes avec les aspects théoriques mentionnés brièvement dans la section précédente. Nous proposons une typologie minimale des approches analytiques formalisées au XX$^{\text{e}}$ siècle qui devrait permettre de mieux comprendre la place des méthodes algébriques en analyse musicale. Cette typologie identifie quatre catégories de la pensée analytique ayant donné une place centrale à la notion de formalisation des structures musicales : approches informationnelles, sémiotiques, génératives et algébriques. Au-delà du caractère limitatif d'une telle typologie, qui ne prétend pas recenser toutes les approches formelles en analyse musicale, cela présente néanmoins l'avantage de dégager certaines catégories majeures de la pensée analytique au XX$^{\text{e}}$ siècle et d'offrir quelques éléments pour comprendre la singularité d'une démarche analytique de type algébrique. À l'intérieur de l'approche algébrique en analyse musicale, deux théories ont acquis une place considérable dans la réflexion analytique contemporaine : la *Set Theory* et l'analyse transformationnelle.

À la différence des présentations traditionnelles de la *Set Theory*, comme celle d'Allen Forte [13], la théorie des ensembles de classes de hauteurs se prête très bien à être intégrée dans une approche algébrique qui utilise pleinement les potentialités de la représentation circulaire du tempérament égal. En outre, une formalisation algébrique des concepts de base de cette approche offre des perspectives théoriques nouvelles sur l'analyse musicale assistée par ordinateur. L'implémentation réalisée en *OpenMusic*, conçue en collaboration avec Carlos Agon (informaticien et chercheur à l'IRCAM) et Killian Sprotte (compositeur) se déploie dans une architecture « paradigmatique » basée sur l'action de certains groupes « mathémusicaux » sur l'espace tempéré (le groupe cyclique en tant qu'ensemble dépourvu de structure algébrique). L'implémentation permet à l'analyste de choisir son propre critère d'équivalence entre structures d'accords en utilisant comme « paradigmes » d'analyse les différents groupes que l'on peut choisir de faire opérer sur l'ensemble des notes. En particulier, nous avons implémenté les relations d'équivalence (donc les catalogues d'accords) induites par l'action de quatre groupes sur l'ensemble des notes d'un tempérament musical choisi : le groupe cyclique (ou paradigme de l'équivalence à une transposition musicale près), le groupe dihédral (paradigme de la *Set Theory*, i.e. équivalence à une transposition et une inversion musicale près), le groupe affine (équivalence à une multiplication près) et groupe symétrique (équivalence à une permutation près). L'architecture paradigmatique de cet environnement est décrite dans la figure suivante qui montre les représentations circulaires et les structures intervalliques associées aux différentes classes d'équivalence d'un même accord (figure 3).

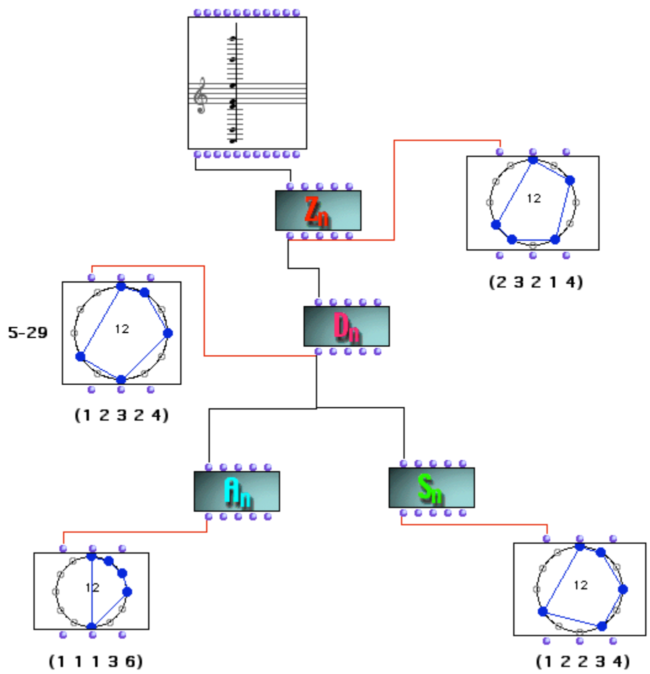

FIG. 3 – Architecture « paradigmatique » de la librairie *OMGroups*. Un accord est réduit progressivement et visualisé selon des relations d'équivalence induites par quatre groupes différents.

L'énumération des classes d'équivalence d'accords (à une transposition et une inversion près) dans le système tempéré à 12 et 24 degrés est donnée en figure 4. Notons le caractère symétrique dans la distribution des orbites, une caractéristique que l'on retrouve dans la distribution des orbites sous l'action du groupe cyclique et affine mais que l'on perd dans le cas du groupe symétrique S_n.
La démarche algébrique permet d'introduire également les concepts de base de l'analyse transformationnelle, telle que David Lewin l'a conçue à partir notamment d'une mathématisation des outils de base de la *Set Theory*. À la différence de l'approche « set-théorique »

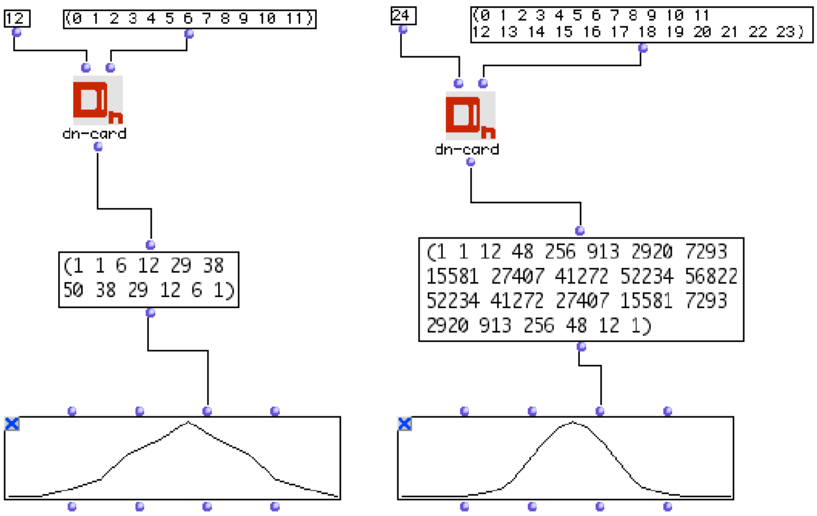

Fig. 4 – Distribution du nombre d'orbites sous l'action du groupe dihédral **Dn** dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales.

classique, l'analyse transformationnelle consiste à segmenter une partition de musique à travers un recouvrement de sous-ensembles qui sont liés par des opérations musicales de transposition et d'inversion [5]. Elle permet ainsi de créer un espace abstrait de relations de transposition et d'inversion entre les accords qui peut décrire le déroulement temporel de la pièce (progression transformationnelle) ou bien une organisation « hors temps », pour reprendre la terminologie de Iannis Xenakis, des transformations algébrico/musicales (réseau transformationnel). La figure 5 montre un exemple d'une démarche transformationnelle dans le cas de l'analyse du *Klavierstück III* de K. Stockhausen par David Lewin [17], une analyse qui est ici reprise en utilisant la représentation circulaire pour mettre en évidence les transformations musicales qui permettent de décrire la partition à partir d'une même structure de pentacorde. Ces transformations ne changent pas la nature « ensembliste » du pentacorde, car les cinq formes sont « équivalentes » à une transposition ou une inversion près (ou une combinaison des deux opérations).

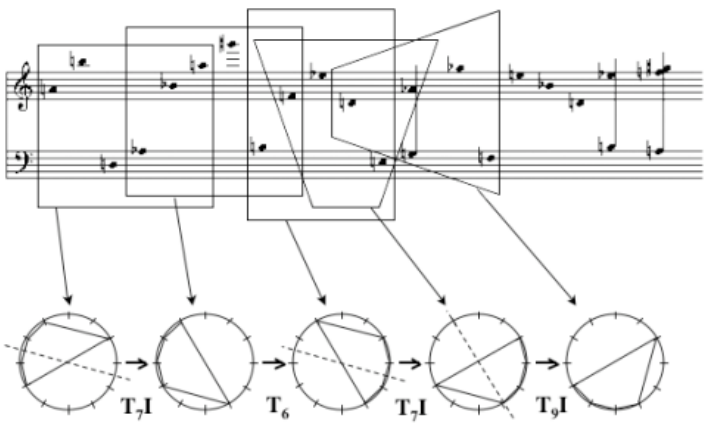

Fig. 5 – Segmentation de la pièce par des transformations d'un même pentacorde

Ces outils informatiques ouvrent des questions nouvelles sur l'analyse assistée par ordinateur et, dans le même temps, offrent aux compositeurs la possibilité de mettre en relation les propriétés combinatoires d'un espace tempéré à n degrés (i.e. une division de l'octave musicale en n parties égales) avec l'étude des structures rythmiques périodiques. La théorie des canons rythmiques de pavage, dont nous allons décrire quelques aspects dans la prochaine section, représente un aspect de cette analogie structurale.

4. Théorie des groupes et isomorphisme hauteur/rythmes

Les trois compositeurs/théoriciens, dont nous avons souligné la démarche algébrique dans la partie introductive, ont tous proposé des applications compositionnelles de l'isomorphisme naturelle entre l'espace tempéré et le domaine des rythmes (périodiques).

4.1. Milton Babbitt : une démarche algébrique pour le sérialisme intégral

Dans le cas de Milton Babbitt la correspondance entre univers des hauteurs et univers rythmique s'établit à la fois à partir d'une technique compositionnelle relevant du sérialisme généralisé et en s'appuyant sur la notion mathématique de « partition », en tant que recouvrement d'un ensemble avec des sous-ensembles disjoints.
Les musicologues semblent parfois hésiter sur la possibilité de parler, dans le cas du compositeur américain, des « combinatoires hauteurs-durées », le problème étant « l'indépendance que [le compositeur] entend donner au processus des durées » [11]. Pourtant, l'indépendance n'est qu'un épiphénomène par rapport à la nature algébrique qui soutient aussi bien l'univers des hauteurs que le domaine des rythmes. Ces idées avaient déjà trouvé une application dans la pratique compositionnelle de Babbitt dès la deuxième moitié des années quarante, en particulier dans les *Trois compositions pour piano* (1947-48). Il s'agit d'un moment important dans l'histoire de la musique du XX^e siècle car, dans la même période, Olivier Messiaen « crée l'événement », pour reprendre une expression de Célestin Deliège, avec la pièce *Mode de valeurs et d'intensités* (1949). Cette pièce a eu une influence considérable sur toute une génération de compositeurs auxquels on doit le début de la réflexion en Europe sur la série généralisée. Nous proposons une hypothèse d'influence directe de Babbitt sur la conception même de cette troisième pièce des *Quatre études de rythme*, dont l'audace semble contredire le caractère pondéré du compositeur français [11]. Cette hypothèse est corroborée par une conversation que nous avons eue avec Milton Babbitt qui nous a confirmé avoir participé aux cours de composition tenus par Olivier Messiaen à Tanglewood en 1948, donc avant la réalisation de la pièce *Mode de valeurs et d'intensités*. En effet, les deux premières études de rythmes ont été composées aux Etats-Unis, comme le frontispice de la partition l'indique. L'indication « Darmstadt - 1949 » sur la partition de *Mode de valeurs et d'intensités* confirme que la pièce a été effectivement composée après la rencontre entre Messiaen et Babbitt.

4.2 Iannis Xenakis : théorie des cribles et groupe des rotations du cube dans l'espace

Une deuxième application compositionnelle des théories algébriques, sans doute influencée par les idées de Messiaen (et indirectement par la combinatoire de Babbitt, si nous acceptons l'hypothèse précédente) est offerte par la pièce *Nomos Alpha* pour violoncelle solo (1966) de Iannis Xenakis. La pièce fait usage de la théorie des cribles pour établir des structures hors-temps de hauteurs n'ayant aucune sorte de régularité interne. Examinons une de ces structures, celle qui est utilisée au tout début de la pièce. Il s'agit d'une gamme non-octaviante (i.e. dont la période n'est pas un multiple de 12) obtenue à travers des opérations ensemblistes (union, intersection, passage au complémentaire) sur des structures régulières de périodicité 11 et 13). Le processus ensembliste qui engendre une telle structure est détaillé en figure 6.

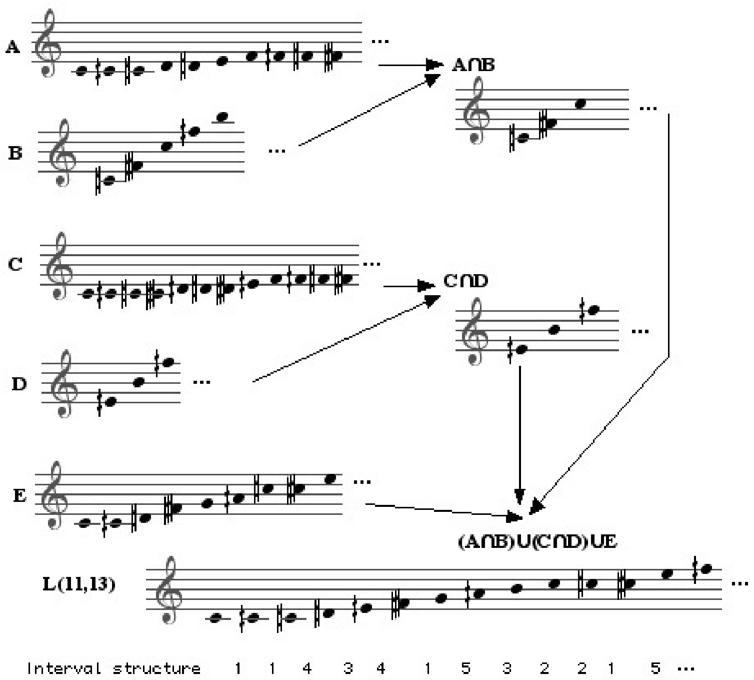

FIG. 6 – Suite d'opérations ensemblistes pour obtenir un des cribles utilisés dans *Nomos Alpha*

En ce qui concerne l'isomorphisme algébrique entre les hauteurs et les durées, Xenakis a souvent insisté sur la possibilité d'utiliser la théorie des cribles pour simuler l'aléatoire à partir des structures rythmiques localement régulières. En effet, comme dans le cas des hauteurs, à l'aide des trois opérations logiques de base (union, intersection, complémentarité), « on peut construire [...] des architectures rythmiques très complexes qui peuvent même aller jusqu'à la distribution simil-aléatoire de points sur une droite si la période est suffisamment longue » [34]. En outre, comme Xenakis l'avait prévu [33], la théorie est computationnelle et donc implémentable dans un langage de programmation pour l'analyse et la composition assistées par ordinateur :
« La théorie des cribles est très générale et par voie de conséquence on peut l'appliquer à toute caractéristique qui est pourvue d'une structure d'ordre total, comme les intensités, les attaques, les densités, les degrés d'ordre, la vitesse, etc. [...]. De plus, dans le futur immédiat nous assisterons à l'exploration de cette théorie et ses multiples utilisations à l'aide d'ordinateurs, car elle est complètement implémentable. »

La modélisation informatique permet dans ce cas de mettre en évidence un aspect peu étudié dans la recherche musicale contemporaine, à savoir l'articulation entre théorie et analyse du processus compositionnel. L'implémentation des méthodes algébriques utilisées par Iannis Xenakis dans *Nomos Alpha* montre l'intérêt musicologique de la modélisation du processus compositionnel, une stratégie analytique qui permet d'étudier l'ensemble des potentialités d'une œuvre parmi les plus riches du répertoire contemporain (sans doute en ce qui concerne les aspects mathématiques). La modélisation informatique de *Nomos Alpha* permet également de mettre en évidence certaines propriétés du processus de Fibonacci que Xenakis utilise dans le groupe des rotations du cube, propriétés dont les retombées musicologiques sont très significatives. En effet, les chaînes engendrées par un processus de Fibonacci appliqué aux 24 rotations du cube ont toujours un comportement cyclique duquel il n'est pas évident de donner a priori la période (longueur) ni le nombre d'éléments différents (degré ou « taux de recouvrement »). Pourtant, une implémentation montre que dans un espace de 576 possibilités, les boucles de Fibonacci ayant une longueur maximale (égale à 18) et le plus grand taux de recouvrement (égal à 13) représentent un sous-ensemble suffisamment riche, car il contient 216 éléments (c'est-à-dire le 37,5% du total). Xenakis a choisi ses boucles de Fibonacci à l'intérieur de ce sous-ensemble et c'est précisément ce choix qui détermine la forme globale de la pièce, divisée en 18 parties, chaque partie correspondant à un élément du groupe des rotations i.e. à une permutation des huit sommets du cube (donc à une suite bien définie d'objets musicaux que le compositeur appelle complexes sonores). La suite de Fibonacci de longueur et degré maximaux utilisée par le compositeur est représentée en figure 7 selon la notation adoptée par Xenakis. Notons que la modélisation informatique permet d'obtenir d'autres variantes de la pièce simplement en utilisant des séries cycliques de Fibonacci différentes mais ayant les mêmes propriétés structurales. Ces séries de Fibonacci sont représentées en figure 7, toujours dans la notation proposée par Xenakis.

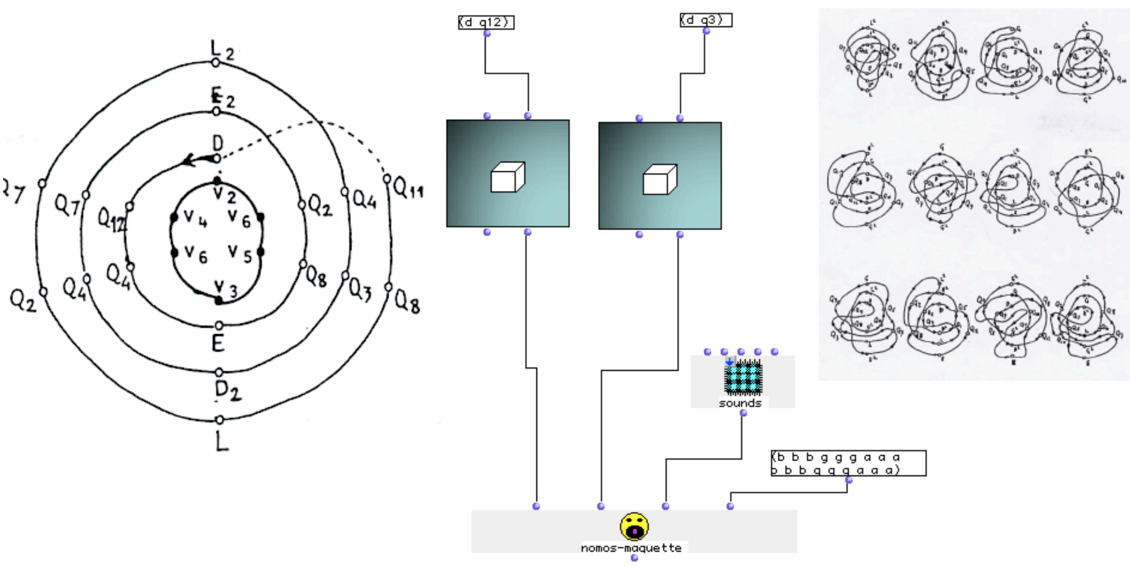

FIG. 7 – Processus de Fibonacci sur le groupe des rotations du cube induisant une permutation des huit sommets du cube dans l'implémentation réalisée en *OpenMusic* et série des variantes proposées par le compositeur.

Cette démarche a également un intérêt d'un point de vue musicologique car le compositeur a souvent souligné la possibilité d'utiliser d'autres séries de Fibonacci. Une étude mathématique des séries de Fibonacci généralisées (i.e. à valeurs dans un groupe) reste un sujet ouvert de recherche musicale qui a, selon nous, un véritable intérêt d'un point de vue mathématique. Il pourrait également avoir des applications musicales tout à fait

nouvelles notamment via l'informatique, d'où l'intérêt d'implémenter ce processus dans un environnement d'aide à l'analyse et à la composition assistées par ordinateur.
L'implémentation permet de créer de multiples variantes de la pièce, variantes qui dépendent des transformations initiales utilisées pour engendrer le processus de Fibonacci sur le groupe des rotations du cube. L'informatique devient ainsi un élément fondamental pour pouvoir étudier le degré de perceptibilité du processus compositionnel utilisé par le compositeur. C'est une question qui est tout à fait transposable à d'autres stratégies compositionnelles utilisées par plusieurs théoriciens dont nous avons commencé à analyser quelques aspects dans le travail de thèse. Cela nous a convaincu de la nécessité d'aborder ce type de questions en essayant d'établir une articulation permanente entre recherche mathématique et implémentation des résultats théoriques dans un environnement d'aide à l'analyse et à la composition assistées par ordinateur.

4.2 Anatol Vieru : suites modales et canons rythmiques mosaïques

Dans le cas du compositeur roumain Anatol Vieru, deux théories différentes concernent directement l'isomorphisme entre espace des hauteurs et espace des rythmes : le calcul des différences finies sur des suites périodiques à valeurs dans un groupe cyclique (*suites modales*) et la théorie des canons rythmiques ayant la propriété de paver l'axe du temps (*tiling rhythmic canons*). Par définition, une suite modale est une application f de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z/nZ}$. Une suite est périodique s'il existe un entier m tel que $f(x) = f(x+m)$ pour tout entier x. Le plus petit m satisfaisant cette propriété est appelé la « période » de la suite. Deux sont les opérateurs de base de toute suite périodique : l'opérateur « différence » D et l'opérateur « translation » T. Si GZ est l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G, les opérateur D et T sont définis de GZ à valeur dans GZ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} Df(x) & = & f(x+1) - f(x) \\ Tf(x) & = & f(x+1) \end{array}$$

Une suite est donc périodique s'il existe un entier m tel que, si l'on note T^m la réitération m fois de l'opérateur translation T, on a l'équivalence formelle :

$$T^m(f) = f$$

De même, on notera D^m la réitération m fois de l'opérateur différence D. Le but d'une formalisation algébrique de la théorie des suites modales est de caractériser les rapports entre une suite f, ses opérateurs T et D et le groupe dans lequel une telle suite prend ses valeurs. En particulier, on peut montrer que deux familles de suites (les suites *réductibles* et les suites *reproductibles*) sont nécessaires et suffisantes pour caractériser toute suite à valeur dans un groupe cyclique quelconque [32].

Définition
Une suite f est *réductible* s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $D^k f = 0$.

Exemple
Soit $f = (2\ 0\ 3\ 3\ 2)$ une suite de période 5 à valeurs dans $\mathbf{Z}_5$. En réitérant l'opérateur 4 fois, on arrive à la séquence zéro :

$$\begin{array}{rcl} D^1 & = & (3\ 3\ 0\ 4\ 0) \\ D^2 & = & (0\ 2\ 4\ 1\ 3) \\ D^3 & = & (2\ 2\ 2\ 2\ 2) \\ D^4 & = & (0\ 0\ 0\ 0\ 0) \end{array}$$

En figure 8, la suite f est interprété comme une séquence d'intervalles dans un accord. Pour tout $D^i(f)$ nous avons un nouvel accord jusqu'au singleton final.

Fig. 8 – Réduction d'une séquence intervallique interprétée comme un accord.

Notons que, plus généralement, étant donnés deux nombres entiers m et k et un nombre premier p, toute sequence de période p^m en $\mathbf{Z}_{p^k}$ est une séquence réductible[3].
Toujours en utilisant l'opérateur différence, on peut introduire une deuxième famille, celle des suites *reproductibles*.

Définition
Une suite f est *reproductible* si elle vérifie l'équation $D^k f = f$ pour un entier $k \geqslant 1$.

Exemple
Soit $f = (2\ 5\ 6\ 3\ 4\ 1)$ une séquence de période 6 en $\mathbf{Z}_7$. Cette séquence se reproduit après 6 itérations de l'opérateur différence :

$$\begin{array}{rcl} D^1 & = & (3\ 1\ 4\ 1\ 4\ 1) \\ D^2 & = & (5\ 3\ 4\ 3\ 4\ 2) \\ D^3 & = & (5\ 1\ 6\ 1\ 5\ 3) \\ D^4 & = & (3\ 5\ 2\ 4\ 5\ 2) \\ D^5 & = & (2\ 4\ 2\ 1\ 4\ 1) \\ D^6 & = & (2\ 5\ 6\ 3\ 4\ 1) \end{array}$$

La figure 9 montre une séquence d'accords correspondants au processus de différences précédents.

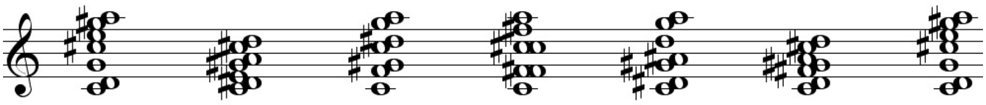

Fig. 9 – Reproduction d'une séquence intervallique après six réiterations du processus de différences successives.

Notons que, plus généralement, l'on peut montrer que toute séquence de $p-1$ éléments distincts en $\mathbf{Z}_p$ est une séquence reproductible[4].

Le processus de différences successives doit parfois être itéré un nombre très élevé de fois pour retrouver la suite initiale ou bien pour la réduire à 0. En outre, il y a des suites qui ne sont ni réductibles ni reproductibles, d'où l'intérêt d'aborder le problème d'un point de vue algébrique. En effet, une formalisation algébrique du problème permet de dégager des critères de réductibilité (ou d'irréductibilité) pour une suite périodique sans effectuer tous les calculs de différences finies. Le résultat central de la théorie modale est un théorème de décomposition qui affirme la possibilité de décomposer (de façon unique) toute suite périodique à valeurs dans un groupe cyclique $\mathbf{Z/nZ}$ en une somme d'une suite réductible

[3]Pour une preuve par induction sur m, voir [32].
[4]Voir [32] pour des théorèmes de caractérisation des séquences reproductibles.

et d'une suite reproductible et permet de calculer explicitement cette décomposition. Dans le cadre de la thèse nous avons analysé l'utilisation de la théorie des suites modales dans deux pièces d'Anatol Vieru : la *Symphonie n. 2* et *Zone d'oubli*. La figure 10 montre un exemple d'utilisation des suites modales dans l'affectation des paramètres musicaux (hauteurs, durées, intensités, modes de jeu...) de la pièce *Zone d'oubli* pour alto solo.

V	0	3	8	7	11	0	11	10	6	9	0	9	1	2	9
VIII	0	0	0	0	3	3	7	2	0	0	0	6	3	3	3
IV	3	3	4	4	1	11	11	8	3	3	9	4	1	7	11
IX	0	0	0	0	0	3	6	[1]	3	3	3	3	9	0	3
IV	0	10	3	9	10	0	9	7	0	6	7	9	6	4	9

Fig. 10 – Sérialisation des paramètres musicaux via la théorie des suites modales

Le deuxième exemple de correspondance hauteurs/rythmes que nous allons décrire maintenant concerne le problème de la construction de canons rythmiques ayant une propriété globale de pavage de l'espace rythmique. Ce problème, qui avait également intéressé Olivier Messiaen et qui avait été formalisé et généralisé à partir des années 1980, a constitué pour nous le point de départ d'un travail de collaboration avec le compositeur George Bloch. Ce travail offre un bon exemple de la « relation oblique » entre une approche compositionnelle et une formalisation algébrique. En effet, la théorie de Vuza offre la possibilité de trouver explicitement des factorisations pour un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós, mais elle ne s'intéresse pas à l'espace combinatoire des solutions.
Nous avons donné une classification exhaustive des solutions dans le cas de la factorisation du groupe cyclique $\mathbf{Z/72Z}$ en deux sous-ensembles non périodiques, cet ordre étant le plus petit pour un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós[5]. Cette classification a été établie par rapport à l'action de trois groupes différents sur le groupe cyclique d'ordre 72, considéré comme ensemble : le groupe cyclique, le groupe dihédral et le groupe affine. Dans le premier cas, la famille des sous-ensembles R et S comprend respectivement 6 et 3 solutions, pour un total de 18 canons rythmiques différents. Le nombre de canons rythmiques de pavage se réduit à 9 si l'on considère l'action du groupe dihédral sur $\mathbf{Z/72Z}$, les familles des sous ensembles R et S ayant trois éléments chacune. Dans le cas du groupe affine opérant sur $\mathbf{Z/72Z}$, l'espace des solutions pour R et S se réduit à un seul sous-ensemble. On obtient ainsi le résultat surprenant qui affirme l'existence d'un seul canon rythmique de pavage (à une application affine près). La classification paradigmatique, ainsi que le canon rythmique correspondant à la solution unique (à une application affine près) est donnée en figure 11.
Comme nous l'avons déjà mentionné, le travail de recherche mené avec le compositeur George Bloch est emblématique en ce qui concerne les directions parfois très inattendues qu'une recherche théorique peut prendre lorsqu'elle est soumise à la primauté de la pensée compositionnelle. Dans la thèse, nous avons discuté trois problématiques que le compositeur a posées autour du modèle formel et qui sont à la base de trois compositions : le *Projet Beyeler* (2001), le *Projet Hitchcock* (2001) et le *Projet Reims* (2002). Ces problématiques,

[5]Un groupe (cyclique) possède la propriété de Hajós si pour toute factorisation en deux sous-ensembles R et S, au moins l'un des deux est périodique (où un ensemble R est périodique s'il existe un élément g du groupe, différent de l'élément neutre, tel que $g + S = S$).

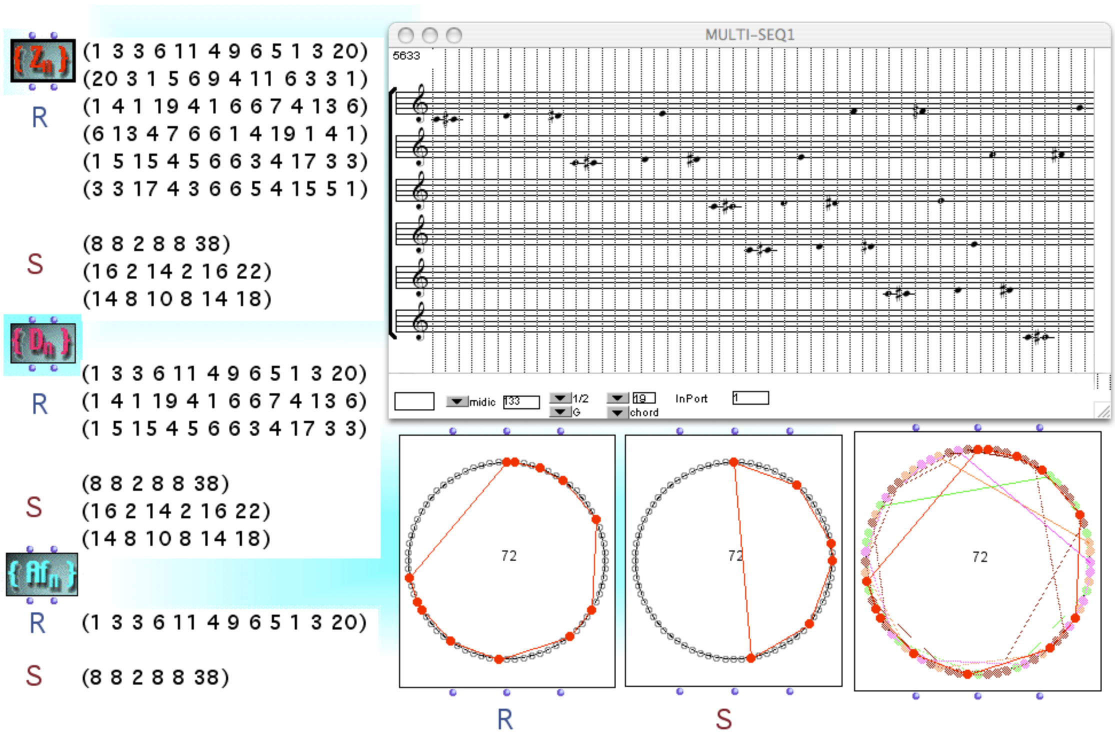

FIG. 11 – Classification paradigmatique, factorisation unique (à une transformation affine près) du groupe cyclique $\mathbf{Z/72Z}$ en somme de deux ensembles périodiques et représentation musicale sous la forme d'un canon rythmique de pavage (notons que R et S correspondent à la structure intervallique des deux sous-ensembles qui factorisent le groupe cyclique).

étroitement liées, concernent l'organisation métrique d'un canon rythmique de pavage, la réduction d'un canon rythmique de pavage à une collection de sous-canons auto-similaires et la modulation (métrique) entre des canons rythmiques de pavages différents[6].

À conclusion de cette partie, reprenons quelques éléments mathématiques liés à la théorie des canons rythmiques de pavage. Pour cela il faut remonter à une célèbre conjecture en théorie des nombres de la fin du XIX^{e} siècle (Conjecture de Minkowski) et à sa résolution algébrique par le mathématicien hongrois G. Hajós. La conjecture a été proposée par Hermann Minkowski dans *Geometrie der Zahlen* [21] sous la forme d'un problème d'approximation simultanée de plusieurs nombres réels par des nombres rationnels. Minkowski a exprimé la conjecture sous une forme géométrique une dizaine d'années plus tard dans l'ouvrage *Diophantische Approximationen* [22]. Dans cette deuxième forme, la conjecture suggère que dans un pavage simple [simple lattice tiling][7] d'un espace à n dimensions par

[6] Ne pouvant pas faire ici une analyse de ces trois problèmes théoriques par rapport au travail compositionnel fait par George Bloch dans son *Projet Beyeler*, nous renvoyons au troisième chapitre de la thèse. Notons simplement ici que cette collaboration nous a permis de mettre en évidence une différence fondamentale entre la formalisation théorique et les stratégies compositionnelles. Aucune des trois problématiques soulevées par le compositeur n'est une conséquence directe du modèle formel. La théorie algébrique des canons rythmiques de pavage offre d'abord un catalogue des solutions qui sert essentiellement à stimuler l'imaginaire du compositeur. À partir du catalogue, le travail compositionnel consiste à essayer de dégager des stratégies pour adapter le modèle formel, parfois très contraignant, à une exigence précise, par exemple la limitation du nombre d'instrumentistes par rapport aux résultats prévus par le modèle.

[7] Par un pavage simple d'un espace à n dimensions, nous entendons une collection de cubes congruents qui recouvrent l'espace de telle façon que ces cubes n'ont pas d'intersection (autre que la frontière) et que

des cubes unités, il y a au moins un couple de cubes qui ont en commun une face entière de dimension $n-1$. Dans le cas particulier de l'espace à trois dimensions, la conjecture exprime le fait que dans un pavage avec des cubes unités, on trouvera toujours un couple de cubes ayant en commun une de leurs faces. La figure suivante (figure 12) montre le cas bidimensionnel que Minkowski pensait pouvoir généraliser facilement à toute dimension n.

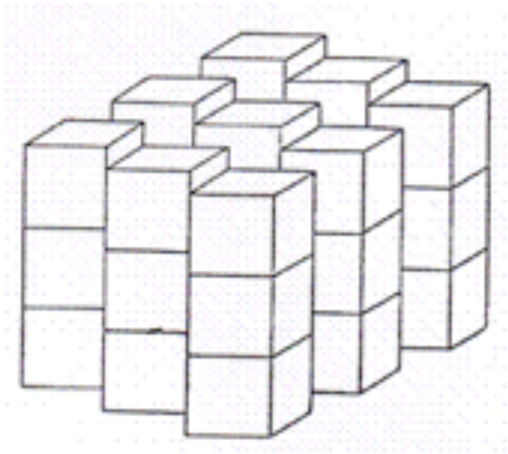

FIG. 12 – Pavage de l'espace tridimensionnel par des cubes unité (figure tirée de l'ouvrage *Diophantische Approximationen*, p. 74)

L'histoire de la conjecture de Minkowski et de ses métamorphoses musicales nous semble paradigmatique en ce qui concerne les multiples applications entre un problème posé par la musique (construction des canons rythmiques ayant une propriété rythmique singulière) et les différents domaines en mathématique susceptible d'apporter une réponse au probléme (théorie des nombres, géométrie, algèbre, ...). Ce qui nous semble encore plus surprenant c'est la possibilité, à partir d'un problème posé par la musique, de remonter à des conjectures mathématiques qui sont toujours ouvertes. C'est le cas, par exemple, de la Conjecture de Fuglede (ou conjecture spectrale), un problème que l'on peut désormais approcher en s'appuyant sur la représentation des structures rythmiques susceptibles d'engendrer le pavage de l'axe du temps, en termes de polynômes à coefficients 0 et 1[8].

5. Quelques ramifications philosophiques de l'approche algébrique en musique

Dans une perspective traditionnelle, l'approche algébrique en sciences humaines renvoie à un paradigme structuraliste dont on connaît désormais assez bien les aspects les plus problématiques [26], et cela en dépit du fait qu'il soit parfois proposé à nouveau comme le paradigme dominant de tout discours philosophique [9]. Cependant, la musique représente un terrain sur lequel on pourrait arriver à concilier certaines instances structuralistes avec d'autres orientations philosophiques, en particulier la phénoménologie husserlienne. C'est une hypothèse que l'on peut avancer à partir, par exemple, des écrits d'Ernst Cassirer

leurs centres forment un treillis. Ce treillis est appelé « simple » pour le distinguer du cas (multiple) dans lequel les cubes ont plusieurs points d'intersections (autres que les frontières).

[8] Pour une description des liens entre la théorie des canons rythmiques et la Conjecture spectrale, voir [4].

dont certaines considérations algébriques sur la mélodie musicale semblent bien s'inscrire dans une démarche qui reste ancrée sur le terrain de la phénoménologie [8]. En outre, l'articulation entre l'objectal et l'opératoire, que l'épistémologue Gilles-Gaston Granger avait suggérée à partir de la fin des années quarante comme étant le fondement de la notion du concept philosophique [14], semble toucher un aspect qui, selon les trois compositeurs/théoriciens sur lesquels nous avons concentré cette étude (Milton Babbitt, Iannis Xenakis et Anatol Vieru), peut être considéré comme la dualité à la base de la théorie musicale : l'articulation entre le *son* et l'*intervalle*. Cette considération ouvre également à des questions qui touchent plus précisément les rapports entre méthodes algébriques, perception et cognition musicale auxquels nos travaux n'ont pas su donner, jusqu'à maintenant, une réponse satisfaisante. Ces types de problématiques demandent une remise en question des ramifications philosophiques de certaines théories algébriques, en particulier la théorie des catégories et des topoï, appliquées à la musique. À partir de réflexions des mathématiciens sur la portée phénoménologique de l'activité mathématique contemporaine [24], et en comparant ces auteurs avec d'autres orientations plus épistémologiques sur la portée cognitive de la réflexion phénoménologique [27], le théoricien de la musique d'aujourd'hui pourrait ainsi arriver à constituer un cadre conceptuel nouveau à l'intérieur duquel certains problèmes mathématiques posés par la musique ont des implications importantes pour la perception et soulèvent des questions philosophiques auxquelles la philosophie toute seule n'aurait peut-être jamais pensé.

Remerciements

Je remercie Athanase Papadopoulos et Xavier Hascher pour m'avoir invité à participer à cette première Journée Mathématique/Musique à Strasbourg organisée par l'Institut de Recherche Mathématique Avancée et le Département de Musique et avoir sollicité cette contribution. Merci à Odile Schladenhaufen pour sa lecture attentive de l'article. Cette étude étant un résumé des résultats contenus dans mon travail de thèse, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien mes recherches. Je remercie tout particulièrement deux amis, car sans eux la thèse n'aurait tout simplement pas vu le jour : Carlos Agon et Jean Carrive. Je ne saurais trop remercier Carlos pour la disponibilité et la générosité inconditionnelle dont il a fait preuve à tout moment. Mais il n'y aurait également pas eu de thèse sans la lecture patiente de Jean qui a accepté de poser momentanément son violon et de partir pour un voyage dans les orbites de la musicologie computationnelle. Merci.

Références

[1] C. Agon, M. Andreatta, G. Assayag, S. Schaub (2004), *Formal Aspects of Iannis Xenakis' Symbolic Music : A Computer-Aided Exploration of Compositional Processes*, Journal of New Music Research, **33/2**, 145-159.

[2] C. Adler (1885), *Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft*, Vierteljahresschrift für Musikwissenschaft, **1**, 5-20.

[3] E. Amiot (2004), *Why rhythmic Canons are interesting*, Perspectives in Mathematical Music Theory, (G. Mazzola, E. Puebla et T. Noll éd.), EpOs, Université d'Osnabrück.

[4] E. Amiot, M. Andreatta, C. Agon (2005), *Tiling the (musical) line with polynomials : some theoretical and implementational aspects*, Proceedings of the International Computer Music Conference, Barcelona.

[5] M. Andreatta et S. Schaub (2003), *Une introduction à la Set Theory : les concepts à la base des théories d'Allen Forte et de David Lewin*, Musurgia, **X/1**, 73-92.

[6] M. Andreatta (2004), Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX$^{\text{e}}$ siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels , *Thèse, EHESS.*

[7] G. Assayag, C. Agon, M. Laurson, C. Rueda (1999), *Computer Assisted Composition at Ircam : Patchwork and OpenMusic*, Computer Music Journal, **23(3)**.

[8] E. Cassirer (1944), *The concept of group and the theory of perception*, Philosophy and Phenomenological Research, **V/1**, 1-36.

[9] P. Caws (1988), *Structuralism. A Philosophy for the Human Sciences*, Contemporary Studies in Philosophy and the Human Sciences, Humanities Press, New Jersey.

[10] M. Chemillier (1990), Structure et Méthode algébriques en informatique musicale, *Thèse, L.I.T.P., Institut Blaise Pascal.*

[11] C. Deliège (2003), Cinquante ans de modernité musicale : de Darmstadt à l'Ircam. Constribution historiographique à une musicologie critique, *Mardaga*, Bruxelles.

[12] H. Eimert (1964), Grundlagen der musikalischen Reihentechnik, *die Reihe*, Universal éd.

[13] A. Forte (1973), The Structure of Atonal Music, *New Haven, Yale University Press.*

[14] G.-G. Granger (1994), Formes, opérations, objets, *Librairie Philosophique J. Vrin*, Paris.

[15] G. Hajós (1942), *Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter*, Math. Zeit., **47**, 427-467.

[16] Y. Hellegouarch (1999), *Gammes naturelles*, Gazette des mathématiciens, **81-82**.

[17] D. Lewin (1993), Musical Form and Transformation : 4 Analytic Essays, New Haven, *Yale University Press.*

[18] S. MacLane (1998), Categories for the Working Mathematician, Second Edition, *Springer.*

[19] G. Mazzola (1985), Gruppen und Kategorien in der Musik, *Helderman*, Berlin.

[20] G. Mazzola (2003), Topos of Music, *Birkhäuser Verlag.*

[21] H. Minkowski (1896), Geometrie der Zahlen, Leipzig, 1896.

[22] H. Minkowski (1907), Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie, *Chelsea Publishing Company*, New York.

[23] T. Otterström (1935), A Theory of modulation, *The University of Chicago.*

[24] F. PATRAS (2005) : *Phénoménologie et théorie des catégories*, dans L. Boi (éd.) : New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities, Springer.

[25] R. PECK (2003), Klein-Bottle *Tonnetze*, *Music Theory Online*, **9(3)**.

[26] J. PETITOT (1985), Morphogenèse du sens, *PUF*, Paris.

[27] J. PETITOT, F. J. VARELA, B. PACHOUD, J.-M. ROY (2002), Naturaliser la phénoménologie. Essais sur la phénoménologie contemporaine et les sciences cognitives, *CNRS Editions*, Paris.

[28] A. SANDS (1957), *On the factorization of finite abelian groupes*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 65-86.

[29] C. SEEGER (1977), Studies in Musicology (1935-1975), *University of California Press*.

[30] A. VIERU (1980), Cartea modurilor, 1 (Le livre des modes, 1), *Ed. muzicala*, Bucarest.

[31] D.T. VUZA (1991), *Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons (in four parts)*, Perspectives of New Music, **29(2)**, 22-49.

[32] D.T. VUZA ET M. ANDREATTA (2001), *On Some propertis of periodic sequences in Anatol Vieru's Modal Theory*, Tatra Mt. Math. Publ. **23**, 1-15.

[33] I. XENAKIS (1985), Arts/Sciences - Alloys, *Stuyvesant : Pendragon Press.*

[34] I. XENAKIS (1988), Redécouvrir le temps, *Éditions de l'Université de Bruxelles.*

[35] I. XENAKIS (1992), Formalized Music, (Revised Edition), *Pendragon Press*, Stuyvesant NY.

Moreno ANDREATTA
IRCAM/CNRS UMR 9912
Moreno.Andreatta@ircam.fr