Quelques propriétés de la technique de Boulez de multiplication des blocs sonores

Nicolas Weiss

Résumé : En 1952, Pierre Boulez a décrit un procédé de multiplication de blocs sonores, dont il s'est servi par la suite comme principe compositionnel. Nous proposons un survol de certains aspects formels de ce procédé, qui sont liés à des questions qui ont pu se poser relativement à son utilisation en musique.

Mots-clés : Bloc sonore - Formalisme musical.

A l'origine de cet article se trouvent des questions qui m'ont été posées par Werner Strinz sur la possibilité ou non d'étudier de manière formelle des propriétés du principe de multiplication des blocs sonores que Pierre Boulez a décrit et utilisé, notamment dans *L'Artisanat furieux*. Je voudrais remercier Werner Strinz ainsi que les organisateurs de la Rencontre Mathématique-Musique 2005 à l'IRMA (Strasbourg) le 14 décembre 2005, au cours de laquelle une approche de ces questions a fait l'objet d'un exposé.

1. La multiplication de blocs sonores

1.1. Qu'est-ce qu'un bloc sonore ?

Soit E un ensemble de hauteurs. On peut les rapporter à une même octave. Si deux ensembles de hauteurs E et E' se confondent quand on les rapporte à la même octave, on dit qu'ils sont équivalents.

On peut considérer les classes d'équivalence d'ensembles de hauteurs dont toutes les hauteurs restent distinctes une fois rapportées à une octave. On appellera *bloc sonore* une telle classe d'équivalence B. On appellera *réalisation* du bloc sonore B tout ensemble de hauteurs E qui appartient à la classe B.

Rien n'est dit quant à la distribution dans la partition de la réalisation d'un bloc : elle pourra être mélodique, sous forme d'accords, etc. Pierre Boulez parle suivant les textes, soit de bloc sonore, soit de complexe de sons, soit de sonorité.

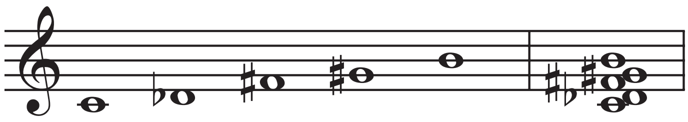


Fig. 1 – Exemple de bloc sonore

Un bloc sonore peut également être vu comme un ensemble d'intervalles construits au sein d'une même octave au-dessus d'une hauteur particulière, qu'on appellera *origine* du bloc afin de rester neutre vis à vis des notions de note de basse, note fondamentale *etc* en harmonie. Il n'y a aucune raison de favoriser une classe de hauteurs du bloc par rapport à une autre dans le choix de l'origine du bloc. Cette notion sert uniquement à faciliter la description des exemples.

1.2. Transposition d'un bloc sonore

Tout bloc sonore peut-être transposé. Si on voit un bloc B comme un ensemble d'intervalles construits au sein d'une même octave au-dessus d'une origine donnée, alors on obtient les 12 transpositions du bloc B en construisant les mêmes intervalles au-dessus d'une des 12 classes de hauteurs chromatiques. On s'est donc contenté de décaler l'origine du bloc.

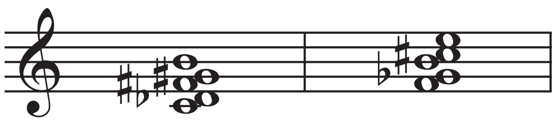


Fig. 2 – Transposition d'un bloc sonore

Dans l'exemple de la figure 2, le bloc sonore de gauche a été transposé d'une quarte vers le haut pour devenir le bloc sonore de droite. Si on fait le choix d'origine « classe de *do* » pour le bloc de gauche, cette origine a été modifiée en « classe de *fa* » dans le bloc de droite.

1.3. Principe de multiplication de deux blocs sonores

Le principe est très simple et a été décrit par Pierre Boulez dans son article *Eventuellement* [1] : il consiste à transposer le bloc sonore A sur toutes les hauteurs du bloc sonore B puis à réunir toutes ces transpositions sans tenir compte des éventuels recoupements. On obtient alors le bloc sonore $A \times B$.

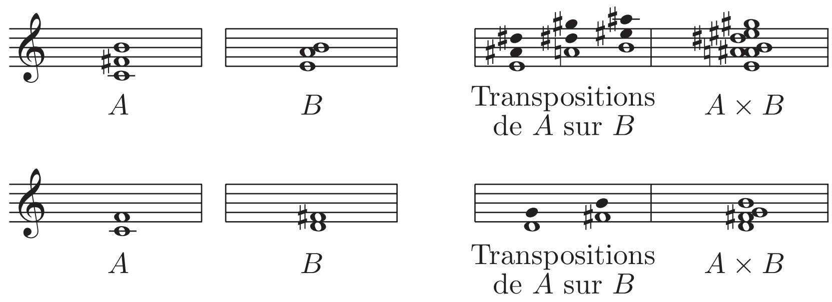


Fig. 3 – Procédé de multiplication de blocs sonores, exemples

2. Utilisation du produit de blocs par Boulez - aperçu

Nous allons donner quelques informations succintes sur la façon dont Pierre Boulez se sert du principe de multiplication de blocs sonores dans *L'Artisanat furieux*, partie du *Marteau sans maître* (1953-55).

L'Artisanat furieux est une pièce sérielle, ce qui signifie qu'elle a été élaborée à l'aide de techniques de composition qui utilisent une ou plusieurs *séries* comme matériau de base. Une série dans sa nature consiste en un ordre fixe des douze classes de hauteurs chromatiques.

Fig. 4 – *Le marteau sans maître* (1953-55), série de *L'Artisanat furieux*

Le principe utilisé dans *L'Artisanat furieux* consiste à engendrer un ensemble de blocs sonores à partir de la série, puis à composer en se déplaçant dans cet ensemble et en se servant des classes de hauteurs des blocs ainsi parcourus.

L'engendrement d'un ensemble de blocs sonores à partir de la série se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps, Pierre Boulez associe cinq blocs sonores a, b, c, d et e à la série par découpage (3 notes - 1 note - 2 notes - 4 notes - 2 notes ; on notera ce découpage $(3, 1, 2, 4, 2)$; il est indiqué sur la figure 4).

Dans un deuxième temps, il effectue les vingt-cinq produits $a \times a$, $a \times b$, $a \times c$ *etc.* Enfin, il permute cycliquement son découpage, ce qui lui permet d'obtenir quatre nouveaux groupes de cinq blocs sonores (découpages $(1, 2, 4, 2, 3)$, $(2, 4, 2, 3, 1)$, $(4, 2, 3, 1, 2)$ et $(2, 3, 1, 2, 4)$) qui permettent chacun d'effectuer vingt-cinq produits de blocs.

Au bout du compte, ce sont 125 blocs sonores (non forcément tous distincts) qui ont été engendrés à partir de la même série, soit beaucoup plus que les 78 blocs sonores qu'on peut obtenir en considérant tous les sous-ensembles de la série.

On remarquera la présence d'un bloc sonore d'une seule classe de hauteurs dans les découpages de la série utilisés. Cela garantit l'apparition parmi les 125 produits de blocs de sous-blocs de la série.

3. Propriétés opératoires

Elles sont bien connues de façon empirique. Nous en donnons ici une démonstration à l'aide d'une première modélisation du principe de multiplication de blocs sonores.

3.1. Représentation du produit comme « ensemble de sommes »

On peut désigner un bloc sonore en précisant un choix d'origine et en donnant l'ensemble des intervalles des classes de hauteurs qui constituent le bloc par rapport à cette origine. On conviendra ici de compter les intervalles en nombre de demi-tons. Les blocs sonores de la figure 2 seront alors désignés par $(do, \{0, 1, 6, 8, 11\})$ et $(fa, \{0, 1, 6, 8, 11\})$. Cette représentation est bien adaptée à l'opération de transposition : seule l'origine précisée change quand on transpose le bloc.

On peut également décrire précisément un bloc sonore en donnant l'ensemble des classes de hauteurs qui le constituent. Désignons par « classe 0 » la « classe de *do* », par « classe 1 » la « classe de *do#* », par « classe 2 » la « classe de *ré* » *etc.* Ainsi les blocs sonores de la figure 2 pourront être désignés par $\{0, 1, 6, 8, 11\}$ et $\{5, 6, 11, 1, 4\}$.

Cette deuxième représentation est moins bien adaptée à l'opération de transposition que la précédente : toutes les classes de hauteurs changent quand on transpose le bloc. Pratiquement, pour obtenir les numéros des classes de hauteurs d'une transposition d'un bloc, il suffit d'additionner modulo 12 aux numéros des classes de hauteurs du bloc l'intervalle de transposition (en demi-tons). Par exemple, le deuxième bloc de la figure 2 se déduit du premier en transposant d'une quarte ascendante (+5 demi-tons), et on a

$$\{5, 6, 11, 1, 4\} = \{(0 + 5), (1 + 5), (6 + 5), (8 + 5), (11 + 5)\} = \text{« } \{0, 1, 6, 8, 11\} + 5 \text{ ».}$$

Pour résumer par une formule, si $\{a_i | i = 1..n\}$ désigne l'ensemble des classes de hauteurs d'un bloc A de n classes de hauteurs distinctes, et si x est un intervalle de transposition (en demi-tons), alors $\{a_i + x \mod 12 | i = 1..n\}$ représente l'ensemble des classes de hauteurs du transposé de A par cet intervalle.

Soit A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes, et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. Considérons le produit $A \times B$. Les deux blocs ne jouent pas le même rôle dans le procédé de multiplication. Du bloc A on retient les intervalles par rapport à une origine qui a été préalablement choisie ; les classes de hauteurs du bloc B servent d'origine à des transpositions du bloc A. Soit x un choix d'origine du bloc A, et $\{a_i | i = 1..n\}$ l'ensemble des intervalles des classes de hauteurs qui constituent le bloc A par rapport à cette origine. On a « $A = (x, \{a_i | i = 1..n\})$ » suivant le premier mode de représentation et « $A = \{a_i + x \mod 12 | i = 1..n\})$ » suivant le deuxième mode de représentation. Soit $\{b_j | j = 1..p\}$ l'ensemble des classes de hauteurs qui constituent le bloc B. On a « $B = \{b_j | j = 1..p\}$ » suivant le deuxième mode de représentation.

Le transposé du bloc A sur la j-ième classe de hauteurs du bloc B est $(b_j, \{a_i | i = 1..n\})$ suivant le premier mode de représentation, ou $\{a_i + b_j \mod 12 | i = 1..n\})$ suivant le deuxième mode de représentation. On en déduit :

Proposition 1. *Soit A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes, et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. L'ensemble des classes de hauteurs qui constituent le produit $A \times B$ est $\{a_i + b_j \mod 12 | i = 1..n, j = 1..p\}$ où $\{a_i | i = 1..n\}$ est l'ensemble des intervalles des classes de hauteurs qui constituent le bloc A par rapport à une origine x préalablement choisie, et $\{b_j | j = 1..p\}$ est l'ensemble des classes de hauteurs qui constituent le bloc B.*

3.2. Commutativité

On reprend les notations de la proposition qui précède. Si on choisit b_1 pour origine du bloc B, alors on a « $B = (b_1, \{b_j - b_1 \mod 12 | j = 1..p\})$ » suivant le premier mode de représentation. D'autre part, on a « $A = \{a_i + x | i = 1..n\}$ » suivant le deuxième mode de représentation. On a ainsi « $B \times A = \{(b_j - b_1) + (a_i + x) \mod 12 | j = 1..p, i = 1..n\}$ » suivant le deuxième mode de représentation d'après la proposition 1.

Mais $\{(b_j - b_1) + (a_i + x) \mod 12 | j = 1..p, i = 1..n\} = \{a_i + b_j + (x - b_1) \mod 12 | i = 1..n, j = 1..p\} =$ « $A \times B + (x - b_1)$ ». Donc $B \times A$ se déduit de $A \times B$ par transposition.

Proposition 2. *Le produit de blocs sonores est commutatif à transposition près :*

$$B \times A \overset{transposition}{=} A \times B.$$

3.3. Renversement et produit

Par analogie avec le langage harmonique classique, on appelera *renversement* le fait de changer de choix d'origine d'un bloc sonore B.

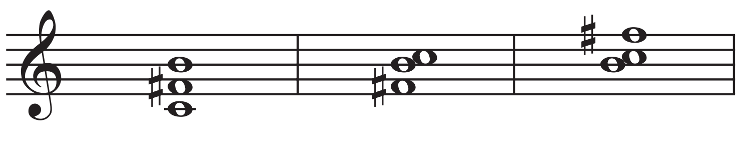


Fig. 5 – Exemple de renversement

Il est clair que le bloc sonore ne change pas quand on le renverse. On change cependant de réalisation du bloc comme on le voit sur l'exemple de la figure 5. Soient deux blocs sonores A et B. Quand on effectue le produit $A \times B$, on transpose le bloc A sur les classes de hauteurs du bloc B, ce qui est complètement indépendant du choix de l'origine du bloc B. D'où :

Proposition 3. *Soient A et B deux réalisations de blocs sonores. On désigne par $Renv(B)$ un renversement de la réalisation B. On a*

$$A \times Renv(B) = A \times B.$$

On déduit des propositions 2 et 3 :

Corollaire 4. *Soient A et B deux réalisations de blocs sonores. On désigne par Renv(A) un renversement de la réalisation A. On a*

$$Renv(A) \times B \stackrel{transposition}{=} A \times B.$$

Il ressort du corollaire 4 que le produit de deux blocs sonores dépend du choix des réalisations de ceux-ci, mais seulement à transposition près. Pour définir proprement la multiplication de blocs sonores, il faudrait donc se restreindre uniquement à des classes de blocs à transposition près.

4. Contrôle de la nature « harmonique » du produit de blocs

On a vu en section 2 comment Pierre Boulez se sert du principe technique de multiplication de blocs sonores comme principe compositionnel dans *L'Artisanat furieux*.

Ce procédé, qui permet d'assurer d'un côté une grande cohérence du matériau compositionnel et de l'autre une échappatoire à certaines contraintes liées à l'écriture sérielle, paraît fort séduisant. Il se pose cependant le problème du contrôle des qualités sonores des blocs produit engendrés.

Nous traitons ici un exemple particulier : celui des blocs sonores qui correspondent à des accords ou des échelles sonores utilisés en musique dite classique. On les appellera *blocs classés*. Les compositeurs sérialistes ne cherchent pas forcément à éviter ce type de blocs sonores dans leurs oeuvres, mais il est nécessaire pour la plupart d'entre eux de contrôler leurs occurrences, car ces blocs ont de très fortes connotations auditives (nous restons volontairement vague afin de ne pas dériver vers des questions musicologiques qui ne sont pas l'objet de cet article et dont nous ne sommes aucunement spécialiste).

Dans les oeuvres de Pierre Boulez qui utilisent la multiplication de blocs sonores, les blocs classés sont rares et leurs occurences contrôlées. Il est naturel de se demander si Pierre Boulez a du vaincre des difficultés importantes pour arriver à cette situation, ou s'il est inhérent à la technique de multiplication de blocs que les blocs classés soient rares parmi les produits de blocs envisageables.

Nous répondons à cette question à l'aide d'une modélisation géométrique du produit de blocs.

4.1. Modélisation géométrique du produit de blocs

Il est classique de représenter les 12 classes de hauteurs chromatiques sur un cercle (voir figure 6). On peut alors associer à tout bloc sonore le polygone convexe dont les sommets sont les classes de hauteurs du bloc. Ainsi, à un bloc de deux hauteurs est associé un segment, à un bloc de trois hauteurs est associé un triangle, à un bloc de quatre hauteurs est associé un quadrilatère, à un bloc de cinq hauteurs est associé un pentagone *etc.*

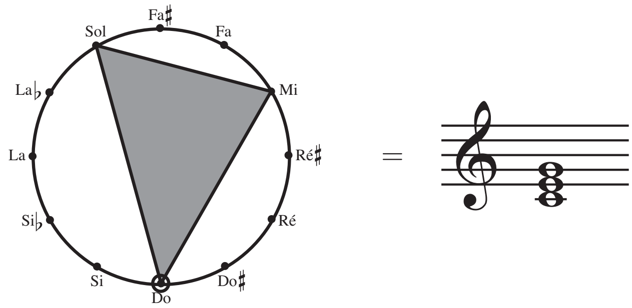


Fig. 6 – Polygone convexe associé à un bloc sonore

La transposition d'un bloc correspond géométriquement à la rotation du polygone associé au bloc. Si on choisit un des sommets x du polygone associé à un bloc A, alors le polygone convexe associé au produit du bloc A et d'un autre bloc B est l'enveloppe convexe de la réunion de tous les transformés par rotation du polygone associé à A tels que son sommet x se retrouve en l'un des sommets du polygone convexe associé au bloc B (voir figure 7 page suivante).

4.2. Pourquoi les blocs classés sont rares

Proposition 5. *Soit A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. Alors le nombre de classes de hauteurs distinctes du bloc sonore $A \times B$ est compris entre* $\max(n, p)$ *et* $\min(n \times p, 12)$.

Démonstration. Le bloc B contient au moins une classe de hauteurs, aussi le bloc $A \times B$ contient au moins les n classes de hauteurs distinctes du transposé du bloc A sur une classe de hauteurs de B. Le bloc $A \times B$ contient également au moins les p classes de hauteurs distinctes du bloc B car elles servent d'origine aux transpositions du bloc A. Donc le nombre de classes de hauteurs distinctes du bloc $A \times B$ est au moins égal à $\max(n, p)$.

Le bloc $A \times B$ est fait de p transpositions du bloc A. Le bloc $A \times B$ contient donc au maximum $n \times p$ classes de hauteurs distinctes si aucune classe de hauteurs n'est commune à plusieurs de ces p transpositions du bloc A. Par ailleurs, il n'y a que douze classes de hauteurs distinctes. Donc le nombre de classes de hauteurs distinctes du bloc $A \times B$ est au plus $\min(n \times p, 12)$. $\square$

Le nombre de classes de hauteurs distinctes a donc tendance à augmenter sensiblement quand on effectue des produits de blocs. Pour qu'il reste petit, il faut beaucoup de recoupements, ce qui impose des restrictions géométriques aux polygones convexes associés à deux blocs sonores A et B dont on effectue le produit.

Nous allons traiter l'exemple des blocs sonores de trois classes de hauteurs distinctes. Soit donc un bloc sonore C de trois classes de hauteurs distinctes, et A (resp. B) un bloc sonore de n (resp. p) classes de hauteurs distinctes. On suppose qu'on a $A \times B = C$.

La proposition 5 impose $n, p \leq 3$ et $n \times p \geq 3$. Le couple (n, p) appartient donc à $\{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. La proposition 2 nous autorise à ne considérer que les couples $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 3)$.

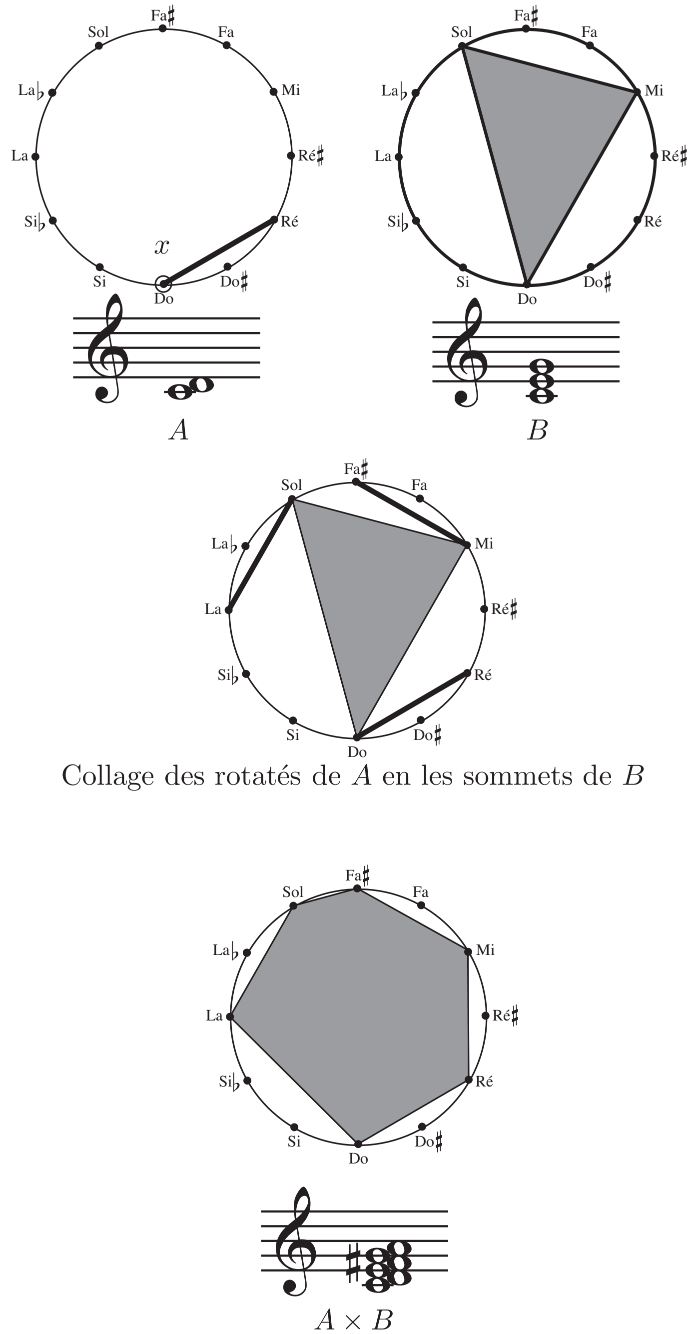


Fig. 7 – Produit de blocs - version géométrique

Cas $n = 1$, $p = 3$. Tout bloc est produit d'un bloc quelconque d'une seule classe de hauteurs avec lui-même. Ce cas dégénéré ne crée pas de réelle contrainte dans la manière de procéder de Pierre Boulez (voir section 2). Il lui suffit, soit de ne pas isoler une classe de hauteurs lors du découpage de la série, soit s'il fait le choix d'en isoler quand même une, de ne pas choisir une série qui contient un bloc classé.

Cas $n = 2$, $p = 2$. Le bloc C est produit de deux blocs de hauteurs qui correspondent à deux intervalles. L'intervalle entre les deux classes de hauteurs du bloc A est égal à l'intervalle entre les deux classes de hauteurs du bloc B ou à son complémentaire (ces deux cas reviennent au même quitte à renverser le bloc B, ce qui ne change pas le produit d'après la proposition 3). Dans le cas contraire, il n'y aurait pas de recoupement entre les transpositions du bloc A qui constituent $A \times B$, et $A \times B$ contiendrait quatre classes de hauteurs distinctes. Le bloc C est donc « le carré d'un intervalle ». Les seuls blocs classés qui sont des carrés d'intervalles sont ceux auxquels correspondent l'accord de quinte diminuée (carré de la tierce mineure) et l'accord de quinte augmentée (carré de la tierce majeure).

Cas $n = 3$, $p = 2$. Le bloc $A \times B$ est constitué de deux transpositions du bloc B. Ces deux transpositions doivent complètement se recouper d'après la proposition 5. Fixons une origine x du bloc A, et considérons une arête a du polygone convexe associé au bloc A dont l'un des sommets est x. L'arête a correspond au même intervalle (à renversement près) que le bloc B. En effet, la transposition du bloc A sur l'une des deux classes de hauteurs du bloc B doit contenir l'autre classe de hauteurs de B puisque $A \times B$ contient les classes de hauteurs de B. En changeant de choix d'origine pour A, on obtient que le triangle associé à $A \times B$ est équilatéral. Le triangle équilatéral correspond à l'accord de quinte augmentée.

Cas $n = 3$, $p = 3$. Le bloc $A \times B$ est constitué de trois transpositions du bloc B qui doivent complètement se recouper. On montre avec le même raisonnement que pour $n = 3$, $p = 2$ que les deux triangles associés à A et B sont automatiquement équilatéraux.

Au bout du compte, les seuls blocs classés de trois classes de hauteurs distinctes qui peuvent se présenter comme produit de blocs sont ceux qui correspondent aux accords de quinte diminuée et de quinte augmentée, et ils n'y a que très peu de façons de les obtenir. Il faudrait des contraintes fortes sur la série de départ et son découpage pour obtenir un bloc classé de trois classes de hauteurs distinctes avec le procédé utilisé par Pierre Boulez dans *L'Artisanat furieux*.

L'étude du cas des blocs de quatre classes de hauteurs distinctes est analogue. Les seuls blocs de quatre classes de hauteurs distinctes classés qui peuvent se présenter comme produit de blocs sont ceux qui correspondent aux accords de septième majeure, mineure ou diminuée. Aucun bloc correspondant à un accord de neuvième classé n'est produit de deux blocs d'au moins deux classes de hauteurs distinctes. L'échelle du mode majeur (qui est la même que celle des mode de ré, mi, fa, sol, la et si) est produit d'une quinte juste et du tétracorde « do-ré-mi-fa ». On peut également décomposer en produit de blocs l'échelle de la gamme par ton (il lui est associé un hexagone régulier) et l'échelle pentatonique, mais pas l'échelle du mode mineur.

Finalement, il y a très peu de possibilités d'obtenir des blocs classés comme produit de blocs, et on peut conclure que le produit de blocs est un bon outil pour assurer la rareté des blocs sonores classés.

4.3. Blocs premiers

On appellera *bloc premier* tout bloc sonore qui n'est produit que de lui-même avec un bloc d'une seule classe de hauteurs. Nous avons déjà rencontré de tels blocs : les blocs sonores qui correspondent aux accords parfaits majeur et mineur sont premiers puisque les seuls blocs classés de trois classes de hauteurs distinctes qui peuvent se présenter comme produit de deux blocs sonores d'au moins deux classes de hauteurs distinctes sont ceux qui correspondent aux accords de quinte diminuée et de quinte augmentée (voir section précédente).

On peut dresser un inventaire de tous ces blocs en faisant calculer à un programme informatique l'ensemble des tables de multiplication de blocs sonores. On trouve 128 blocs premiers sur les 351 blocs sonores non vides possibles à transposition près (voir proposition 13).

Cet inventaire nous semble intéressant au titre suivant : si l'utilisation par Pierre Boulez de la technique de produit de blocs sonores lui permet sans effort d'éviter les blocs sonores classés, elle lui interdit par contre l'accès à plus d'un tiers des blocs sonores possibles, ce qui peut être perçu comme une limite de son procédé de composition. Une solution à ce soucis consiste à s'autoriser à n'employer qu'une partie des classes de hauteurs d'un produit de bloc, ce que Pierre Boulez fait parfois. On rend ainsi accessibles tous les blocs premiers, mais on perd la cohérence du procédé car on détruit tout lien réel avec la série de départ (tout bloc sonore est en effet un sous-bloc du bloc qui correspond à la gamme chromatique).

5. Structure de semi-anneau sur l'ensemble des blocs sonores

On peut se demander si la multiplication de blocs sonores est un phénomène isolé, ou s'il existe une ou plusieurs autres opérations naturelles sur les blocs sonores qui soient correctement compatibles avec le produit de blocs.

On rappelle à destination des non-mathématiciens les notions de groupe et d'anneau.

Definition. Un groupe G est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $+$ telle que

i) on a $a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tout a, b, $c \in G$ (associativité),

ii) il existe un élément neutre $e \in G$ tel que $a + e = e + a = a$ pour tout $a \in G$,

iii) tout élément $a \in G$ possède un opposé noté $-a$ tel que $a + (-a) = -a + a = e$.

On peut noter la loi de composition interne multiplicativement. On parle alors d'inverse plutôt que d'opposé. Si aucun élément différent de e n'a d'élément opposé, on parle de semi-groupe. Si la loi de composition $+$ est commutative, on parle de groupe abélien.

Definition. Un anneau A est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ telles que

i) l'ensemble A muni de $+$ est un groupe abélien d'élément neutre noté 0,

ii) on a $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ pour tout a, b, $c \in A$ (associativité de $\times$),

iii) il existe un élément neutre pour $\times$ noté 1 tel que $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout $a \in A$,

iv) on a $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ pour tout a, b, $c \in A$ (distributivité de $\times$ par rapport à $+$).

En particulier, on a $a \times 0 = 0$ pour tout $a \in A$. Ce n'est pas standard, mais si A muni de $+$ est un semi-groupe, on parlera de semi-anneau. Si le produit $\times$ est commutatif, on parle d'anneau commutatif.

On a déjà vu que le produit de blocs sonores n'est bien défini qu'à transposition près. C'est donc sur cet espace qu'on a une chance de trouver une structure intéressante.

L'unique bloc à transposition près d'une seule classe de hauteurs joue le rôle d'élément neutre pour le produit de blocs sonores. On le notera I. Si A est un autre bloc sonore à transposition près, on a effectivement $A \times I \overset{trsp}{=} I \times A \overset{trsp}{=} A$, car le bloc $A \times I$ est fait d'une unique transposition du bloc A.

La proposition 5 implique que le bloc I est le seul bloc qui possède un inverse, car le nombre de classes de hauteurs du produit de deux blocs A et B ne peut pas être inférieur à leurs nombres de classes de hauteurs distinctes respectifs. L'ensemble des blocs sonores à transposition près, muni du produit de bloc n'est donc pas un groupe (d'après la définition d'un groupe donnée plus haut tout élément d'un groupe possède un inverse).

On dispose d'un bon indice pour avoir l'intuition qu'une structure proche de celle d'anneau existe sur l'ensemble des blocs sonores à transposition près, dont le produit de bloc serait la loi de composition notée multiplicativement : le bloc vide qu'on notera 0 se comporte comme un élément nul, car si A est un bloc sonore quelconque, alors $A \times 0 = 0$ (il n'y a pas de classe de hauteurs dans le bloc 0 sur laquelle transposer le bloc A).

Désignons par « classe 0 » la « classe de *do* », par « classe 1 » la « classe de *do#* », par « classe 2 » la « classe de *ré* » *etc.* Soit un bloc sonore B et soit un vecteur colonne v à douze lignes numérotées de 0 à 11 et désignées par $v_0, \dots, v_{11}$. Pour chaque $0 \leq i \leq 11$, posons $v_i = 1$ si la classe de hauteurs i appartient à B, et $v_i = 0$ si la classe de hauteurs i n'appartient pas à B. On appellera le vecteur v *vecteur associé au bloc sonore* B, et on le notera $v(B)$.

Proposition 6. *L'application $B \mapsto v(B)$ est une bijection de l'ensemble des blocs sonores sur l'ensemble des vecteurs associés aux blocs sonores.*

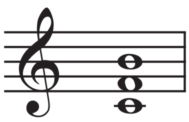
Démonstration. C'est évident, car l'association d'un vecteur à un bloc sonore revient à « cocher » ses classes de hauteurs. □

Le modèle vectoriel ci-dessus n'est pas suffisant pour décrire aisément le produit de deux blocs A et B. Il faut se donner un moyen de « sélectionner » les bonnes transpositions du bloc A qui forment $A \times B$.

Le vecteur associé à la transposition d'un demi-ton vers le haut d'un bloc B se déduit du vecteur $v(B)$ en permutant circulairement les lignes de $v(B)$ de telle façon que pour $0 \leq i \leq 10$, la i-ème ligne de $v(B)$ devienne $(i+1)$-ème ligne et que la ligne 11 devienne ligne 0. Si on répète cette opération encore dix fois, on obtient les vecteurs associés aux douze transpositions du bloc B (ils ne sont pas forcément tous distincts), qu'on peut réunir en une matrice M carrée 12×12 à coefficients dans $\{0, 1\}$ telle que $M_{(i+1 \mod 12),(j+1 \mod 12)} = M_{i,j}$ pour tout $0 \leq i, j \leq 11$ (on a choisi de numéroter les lignes et les colonnes de 0 à 11). On appelle la matrice M *matrice associée au bloc sonore* B, et on la note $M(B)$. On a bien sûr :

Proposition 7. *L'application $B \mapsto M(B)$ est une bijection de l'ensemble des blocs sonores sur l'ensemble des matrices associés aux blocs sonores.*

Démonstration. C'est automatique, car la matrice $M(B)$ est uniquement déterminée par son premier vecteur colonne qui est $v(B)$. $\square$

$B =$ 

$$v(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{r} \text{do} \\ \text{do\#} \\ \text{ré} \\ \text{ré\#} \\ \text{mi} \\ \text{fa} \\ \text{fa\#} \\ \text{sol} \\ \text{sol\#} \\ \text{la} \\ \text{la\#} \\ \text{si} \end{array}$$

$$M(B) = \begin{array}{l} \text{do} \\ \text{do\#} \\ \text{ré} \\ \text{ré\#} \\ \text{mi} \\ \text{fa} \\ \text{fa\#} \\ \text{sol} \\ \text{sol\#} \\ \text{la} \\ \text{la\#} \\ \text{si} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 8 – Vecteur associé à un bloc - Matrice associée à un bloc

On rappelle pour les non-mathématiciens le principe d'addition et de multiplication des matrices par un exemple sommaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & . \\ . & . \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & . \\ . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & . \\ . & . \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} . & . \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & . \\ 4 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . \\ 1\times 3 + 2 \times 4 & . \end{pmatrix}.$$

Si les matrices sont à coefficients dans $\{0,1\}$, on peut considérer la somme et le produit booléens donnés par : $0+0=0$; $0+1=1+0=1$; $1+1=1$ et $0\times 0 = 0\times 1 = 1\times 0 = 0$; $1\times 1 = 1$. On parle alors de somme booléenne et de produit booléen de matrices.

Proposition 8. *Soient A un bloc sonore de n classes de hauteurs distinctes et B un bloc sonore de p classes de hauteurs distinctes. Soient $v(A)$, $v(B)$, $M(A)$ et $M(B)$ leurs vecteurs et matrices associés.*

i) On a $v(A\times B) = M(A)\times v(B)$.

ii) On a $M(A\times B) = M(A)\times M(B)$.

On a considéré le produit booléen de matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

Démonstration. Comme le vecteur $v(B)$ est à coefficients dans $\{0,1\}$, le produit de la matrice $M(A)$ avec le vecteur $v(B)$ est la somme des colonnes $i_1,\dots,i_p$ de $M(A)$ avec $0 \le i_1 < \dots < i_p \le 11$ et telles que les lignes $i_1,\dots,i_p$ de $v(B)$ correspondent aux p classes de hauteurs de B. Mais la k-ième colonne de $M(A)$ ($0 \le k \le 11$) est le vecteur associé à la transposition du bloc A sur la classe de hauteurs numéro k, aussi le produit $M(A)\times v(B)$ est la somme booléenne des vecteurs associés aux transpositions de A sur les classes de hauteurs de B, c'est à dire le vecteur $v(A\times B)$ associé au produit $A\times B$.

Le matrice $M(A)\times M(B)$ est la juxtaposition des vecteurs colonnes de la forme $M(A)\times T_t(v(B))$ où $T_t(v(B))$ est le vecteur associé à une transposition de t demi-tons vers le haut du bloc B, avec $0\le t\le 11$. On a $M(A)\times T_t(v(B)) = T_t(v(A\times B))$, car si on transpose d'un certain intervalle le bloc B, le produit $A\times B$ est transposé du même intervalle. Le produit $M(A)\times M(B)$ est donc exactement la matrice $M(A\times B)$ associée au produit $A\times B$. □

Il est naturel de considérer l'addition booléenne des vecteurs et des matrices associées à deux blocs sonores A et B et de se demander si elle correspond à une opération naturelle sur les blocs sonores A et B. On va étudier ici le cas des vecteurs associés. Celui des matrices associées est analogue et aboutit au même résultat.

Considérons donc la ligne i du vecteur colonne $v(A)+v(B)$ (addition booléenne), avec $0\le i\le 11$. Si cette ligne contient 1, l'une au moins parmi la i-ème ligne de $v(A)$ et la i-ème ligne de $v(B)$ contient également 1, car en addition booléenne, on a $1 = 1{+}0 = 0{+}1 = 1{+}1$. Donc l'un au moins des blocs A et B contient la classe de hauteurs i.

Si par contre la i-ème ligne de $v(A)+v(B)$ contient 0, alors la i-ème ligne de $v(A)$ et la i-ème ligne de $v(B)$ contiennent toutes les deux 0 car en addition booléenne, on a $0 = 0{+}0$ uniquement. Donc les blocs A et B ne contiennent pas la classe de hauteurs i.

En d'autres termes :

Proposition 9. *Soient A et B deux blocs sonores, et $v(A)$, $v(B)$, $M(A)$ et $M(B)$ leurs vecteurs et matrices associés. La somme booléenne des vecteurs $v(A)$ et $v(B)$ (resp. des matrices $M(A)$ et $M(B)$) donne le vecteur associé (resp. la matrice associée) au bloc sonore réunion des classes de hauteurs de A et B.*

Le bloc 0 est naturellement un élément neutre pour la réunion de blocs sonores. La réunion de blocs sonores est associative et commutative, et le bloc 0 est le seul à posséder un opposé, car la réunion d'un bloc A avec un bloc quelconque B contient toujours au moins les classes de hauteurs du bloc A. L'ensemble des blocs sonores, muni de la loi de composition interne de réunion est ainsi un semi-groupe.

On ne l'a pas montré, mais la multiplication de blocs sonores est associative à transposition près. Le bloc I est élément neutre. La distributivité du produit par rapport à la réunion est automatique, car la transposition d'une réunion de blocs est la réunion des transpositions de ces blocs, et le produit de bloc est une réunion particulière de transpositions.

Ainsi :

Proposition 10. *L'ensemble des blocs sonores à transposition près, muni de la réunion de blocs et du produit de blocs, est un semi-anneau d'éléments neutres le bloc vide et l'unique bloc d'une seule classe de hauteurs à transposition près.*

On déduit de la proposition qui précède que la technique de multiplication de blocs sonores choisie par PIERRE BOULEZ est un bon choix.

6. Comptage des blocs sonores

La multiplication de blocs sonores est bien définie à transposition près, mais combien y a-t-il de blocs sonores à transposition près ? Nous donnons ici un calcul de ce nombre bien connu.

Proposition 11. *Le nombre de blocs sonores de p classes de hauteurs distinctes est $\binom{p}{12}$. Il existe 4096 blocs sonores différents (en comptant le bloc vide).*

Démonstration. C'est évident. Les p classes de hauteurs distinctes de chaque bloc sont une combinaison de p classes de hauteurs choisies parmi les douze classes de hauteurs chromatiques. On a $\sum_{p=0}^{n} \binom{p}{12} = 2^{12} = 4096$. □

Il est plus délicat de compter les blocs sonores à transposition près. Tout bloc sonore possède douze transpositions. Cependant certaines peuvent se recouper. On appellera *bloc sonore à transposition limitée* (ou BTL pour abréger) tout bloc sonore qui possède moins de douze transpositions distinctes.

Proposition 12. *Il existe 17 blocs sonores à transposition limitée à transposition près. Ils sont répartis ainsi :*

Classes de hauteurs	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Blocs à transposition près	*1*	*0*	*1*	*1*	*3*	*0*	*5*	*0*	*3*	*1*	*1*	*0*	*1*

Démonstration. Si B est un BTL, alors la répartition de ses p classes de hauteurs distinctes dans une octave donnée est périodique. Cette période divise 12, mais aussi p. C'est ainsi le plus grand commun diviseur de p et 12 qui permet de contrôler la situation. Nous le noterons $(p, 12)$.

Si B est un BTL de p classes de hauteurs distinctes, alors le bloc de $n - p$ classes de hauteurs distinctes dont les classes de hauteurs sont toutes celles qui n'appartiennent pas à B est un BTL de même période que B. En effet, si le positionnement des classes de hauteurs de B est périodique, alors il en est de même du positionnement des classes de hauteurs qui n'appartiennent pas à B.

Il existe un seul bloc vide qu'on considérera à transposition limitée par symétrie avec l'unique bloc de douze classes de hauteurs distinctes qui est un BTL de période 1.

Si $(p, 12) = 1$ ($p = 1$, 5, 7 ou 11), alors il n'y a pas de diviseur commun à p et 12 autre que 1, et par suite aucun BTL de p classes de hauteurs distinctes.

Si $(p, 12) = q$, q un nombre premier ($p = 2$, 3, 9 ou 10), alors les BTL de p classes de hauteurs distinctes sont faits de la répétition d'une période qui répartit $\frac{p}{q}$ classes de hauteurs distinctes parmi $\frac{12}{q}$. Il y a ainsi $\binom{p/q}{12/q}$ BTL à p classes de hauteurs distinctes, qui possèdent $\frac{12}{q}$ transpositions distinctes. Ainsi on trouve : $\frac{2}{12}\binom{2/2}{12/2} = 1$ pour $p = 2$, et $\frac{3}{12}\binom{3/3}{12/3} = 1$ pour $p = 3$. On obtient les valeurs pour $p = 9$ et $p = 10$ par symétrie.

Si $p = 6$, il faut considérer les BTL de période $6 = 12/2$, au nombre de $\binom{3}{6}$, les BTL de période $4 = 12/3$, au nombre de $\binom{2}{4}$, et enfin les BTL de période $2 = 12/6$, au nombre de $\binom{1}{2}$ qui sont aussi de période 4 et de période 6. Cela donne $\binom{3}{6} + \binom{2}{4} - \binom{1}{2} = 24$ BTL de six classes de hauteurs distinctes. A transposition près, il reste $\frac{1}{6}[\binom{3}{6} - \binom{1}{2}] + \frac{1}{4}[\binom{2}{4} - \binom{1}{2}] + \frac{1}{2}\binom{1}{2} = 5$ blocs.

Enfin, si $p = 4$ (ou 8 par symétrie), tout BTL est de période $6 = 12/2$, soit $\binom{2}{6}$ BTL, mais $\binom{1}{3}$ d'entre eux sont aussi de période $3 = 12/4$. Ainsi, à transposition près, il reste $\frac{1}{6}[\binom{2}{6} - \binom{1}{3}] + \frac{1}{3}\binom{1}{3} = 3$ blocs. □

Derrière le résultat bien connu de la proposition précédente se trouve un calcul plus général, qui donne le nombre de blocs sonores à transposition limitée de p classes de hauteurs pour une division de l'octave en n classes de hauteurs. Si la décomposition en facteurs premiers de (p, n) est $p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$, alors ce nombre est

$$\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le k} \binom{p/p_{i_1} \dots p_{i_l}}{n/p_{i_1} \dots p_{i_l}}.$$

Les modes à transposition limitée d'OLIVIER MESSIAEN, le triton, l'accord de quinte augmentée, l'accord de septième diminuée, la gamme par tons, la gamme chromatique, correspondent à une partie de ces 17 blocs à transposition limitée à transposition près.

Proposition 13. *Il existe 352 blocs sonores distincts à transposition près (en comptant le bloc vide). Ils sont répartis ainsi :*

Classes de hauteurs	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Blocs à transposition près	*1*	*1*	*6*	*19*	*43*	*66*	*80*	*66*	*43*	*19*	*6*	*1*	*1*

Démonstration. On a déjà compté à la proposition 12 les BTL à transposition près. Le nombre de BTL de p classes de hauteurs distinctes a été donné plus ou moins explicitement dans la preuve de cette proposition.

Le nombre de blocs sonores de p classes de hauteurs distinctes à transposition près est

$$\frac{\text{Nombre de blocs} - \text{Nombre de BTL}}{12} + \text{Nombre de BTL à transposition près.}$$

Par exemple, pour $p = 6$, il y a $\binom{6}{12} = 12 \times 77$ blocs sonores, dont 24 BTL, et il y a 5 BTL à transposition près. On a donc $\frac{12\times77-24}{12} + 5 = 80$ blocs sonores de six classes de hauteurs distinctes à transposition près. □

Bibliographie

[1] Pierre BOULEZ (1952), *Eventuellement* in *Relevés d'apprenti*, éd Seuil, Paris (1966)

Nicolas WEISS
Université Louis Pasteur
Strasbourg
weiss@math.u-strasbg.fr