A.M.E.A.

Timbre de quelques instruments à corde pincée ou frappée

1 Spectre sonore d'une corde - rôle des conditions initiales

On considère une corde de longueur L attachée à ses deux extrémités. On note c la célérité des ondes transversales pouvant se propager sur la corde, et $y(x,t)$ le déplacement de la corde à l'abscisse x et à l'instant t par rapport à la position d'équilibre.

Q1. Compte-tenu des conditions aux limites, montrer que la solution générale de toute oscillation libre s'écrit :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t] \sin k_n x$$

et préciser l'expression de ω_n et k_n.

Q2. Montrer que la connaissance des conditions initiales du mouvement de vibration, soit $y(x,0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$, permet de calculer les coefficients a_n et b_n. On rappelle que :

$$\int_0^{\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}$$

2 Corde de piano

A l'instant initial $t = 0^-$, la corde est immobile dans sa position d'équilibre. Elle est frappée avec un petit marteau de largeur $e \ll L$ situé entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$, qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. On fait l'approximation que la vitesse initiale de chaque point de la corde à l'instant $t = 0^+$ est modélisée par un créneau de vitesse :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = u \text{ pour } a \leq x \leq a + e$$

Q3. Déterminer les coefficients a_n et b_n.

Q4. Montrer que le choix de a permet de sélectionner les harmoniques et leur amplitude.

Q5. Que faut-il faire pour supprimer l'harmonique (dissonante) $n = 7$? Faire un dessin de la corde et expliquer.

Q6. Dans le cas $a = L/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis ? Déterminer l'énergie de vibration E_n (i.e. énergie cinétique) dans le mode n. Quels phénomènes limitent en fait la création des modes de rang élevé pour des instruments à cordes frappées ?

3 Corde de clavecin

Pour le clavecin, la corde est pincée (à l'abscisse a) et lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale. On admet que le profil initial de la corde est triangulaire.

Q7. Déterminer les coefficients a_n et b_n et en déduire l'énergie de vibration E_n.

Q8. Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin lorsque $a = L/2$. Dans quel cas le timbre est-il plus "cristallin" ?

4 Corde de guitare

Le pincement de la corde peut être réalisé de manière plus délicate que précédemment ; lorsqu'il est effectué avec le doigt comme pour une corde de guitare classique (ou celle d'une harpe), les conditions initiales plus régulières suivantes sont adoptées :

$$y(x, 0) = \frac{4h}{L^2} x(L - x)$$

Q9. Reprendre les calculs de la question précédente. Conclure quant à la pureté du timbre dans le cas de la guitare.