A.M.E.A.

TP Matlab: timbre de quelques instruments à corde pincée ou frappée

L'objectif de ce TP est d'étudier les propriétés spectrales (=le timbre) d'une corde en fonction de la manière dont elle est attaquée : pincée (clavecin, guitare), ou frappée (piano). Il est demandé, outre l'étude théorique, d'écrire deux scripts matlab permettant :

- de visualiser la propagation d'une onde sur une corde pour une condition initiale fixée
- de générer par synthèse additive un timbre d'instrument à corde pour deux types de condition d'attaque (pincement ou marteau).

1 Propagation d'une onde sur une corde

On définit le profil initial de la corde par le profil d'amplitude triangulaire indiqué figure 1. La propagation de l'onde sur la corde est modélisée ainsi :

- sur la corde peuvent se propager une onde progressive $f(x-ct)$ de célérité c, et une onde régréssive $f(x+ct)$ de célérité $-c$, où $f(x \pm ct)$ représente l'amplitude à l'abscisse x et à l'instant t ;
- l'amplitude totale résultant des la superposition de ces deux ondes est $F(x,t) = [f(x-ct)+f(x+ct)]/2$;
- aux extrémités (chevalet et touche pour une guitare), il y a réflexion telle que l'amplitude totale $f(x+ct)+f(x-ct) = 0$ en $x = 0$ et $x = L$ à tout instant. Ceci est illustré par la partie en pointillés sur la figure 1.

Ecrire un script matlab qui :

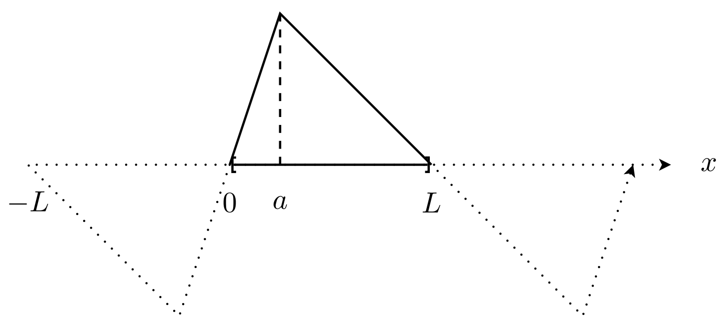

FIG. 1 – Profil de la corde pincée à $t = 0$ entre 0 et L. La partie en pointillée indique le profil de l'onde réfléchie sur les extrémités. On vérifiera que ce profil garantit bien que $F(x,t) = 0$ à chaque extrémité pour tout t.

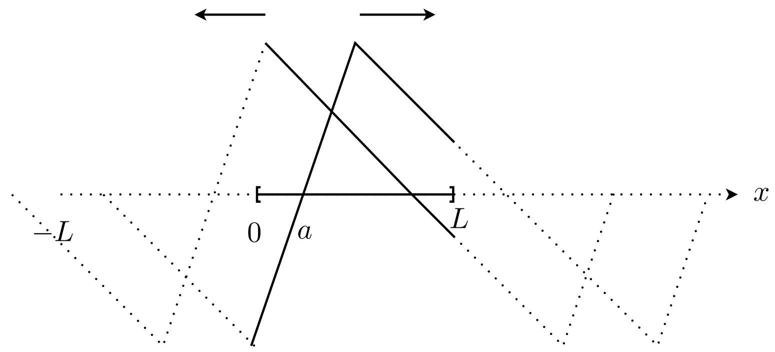

FIG. 2 – Illustration de la propagation des deux ondes à $t > 0$.

- génère le profil initial de la corde (paramètre a ajustable).
- calcule les ondes progressives et régressives à n'importe quel instant t ;
- génère une animation du profil de la corde à tout instant t en superposant les propagations progressive et régressive.

2 Spectre sonore d'une corde - rôle des conditions initiales

On considère une corde de longueur L attachée à ses deux extrémités. On note c la célérité des ondes transversales pouvant se propager sur la corde, et $y(x,t)$ le déplacement de la corde à l'abscisse x et à l'instant t par rapport à la position d'équilibre.

Q1. Compte-tenu des conditions aux limites, montrer que la solution générale de toute oscillation libre s'écrit :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t] \sin k_n x$$

et préciser l'expression de ω_n et k_n.

Q2. Montrer que la connaissance des conditions initiales du mouvement de vibration, soit $y(x,0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$, permet de calculer les coefficients a_n et b_n. On rappelle que :

$$\int_0^{\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}$$

3 Corde de piano

A l'instant initial $t = 0^-$, la corde est immobile dans sa position d'équilibre. Elle est frappée avec un petit marteau de largeur $e \ll L$ situé entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$, qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. On fait l'approximation que la vitesse initiale de chaque point de la corde à l'instant $t = 0^+$ est modélisée par un créneau de vitesse :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = u \text{ pour } a \le x \le a + e$$

Q3. Déterminer les coefficients a_n et b_n.

Q4. Montrer que le choix de a permet de sélectionner les harmoniques et leur amplitude.

Q5. Que faut-il faire pour supprimer l'harmonique (dissonante) $n = 7$? Faire un dessin de la corde et expliquer.

Q6. Dans le cas $a = L/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis ? Déterminer l'énergie de vibration E_n (i.e. énergie cinétique) dans le mode n. Quels phénomènes limitent en fait la création des modes de rang élevé pour des instruments à cordes frappées ?

4 Corde de clavecin

Pour le clavecin, la corde est pincée (à l'abscisse a) et lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale. On admet que le profil initial de la corde est triangulaire.

Q7. Déterminer les coefficients a_n et b_n et en déduire l'énergie de vibration E_n.

Q8. Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin lorsque $a = L/2$. Dans quel cas le timbre est-il plus "cristallin" ?

5 Corde de guitare

Le pincement de la corde peut être réalisé de manière plus délicate que précédemment ; lorsqu'il est effectué avec le doigt comme pour une corde de guitare classique (ou celle d'une harpe), les conditions initiales plus régulières suivantes sont adoptées :

$$y(x, 0) = \frac{4h}{L^2} x(L - x)$$

Q9. Reprendre les calculs de la question précédente. Conclure quant à la pureté (i.e. la monochromaticité) du timbre dans le cas de la guitare.