Option Informatique Quantique

Quelques algorithmes quantiques

2016

1 Téléportation quantique

Alice (émetteur) souhaite transmettre *fidèlement* un qubit $|\psi\rangle_1$ à un destinataire, Bob, voir figure ci-joint. On appelle ce processus *téléportation quantique*, le qubit en question pouvant après tout être suffisamment complexe pour représenter l'état d'un organisme vivant (même si en l'état actuel de la technologie nous sommes très loin de cette éventualité).

Q1. Pourquoi Alice ne peut-elle pas simplement mesurer le qubit en sa possession et transmettre le résultat de sa mesure à Bob par téléphone ?

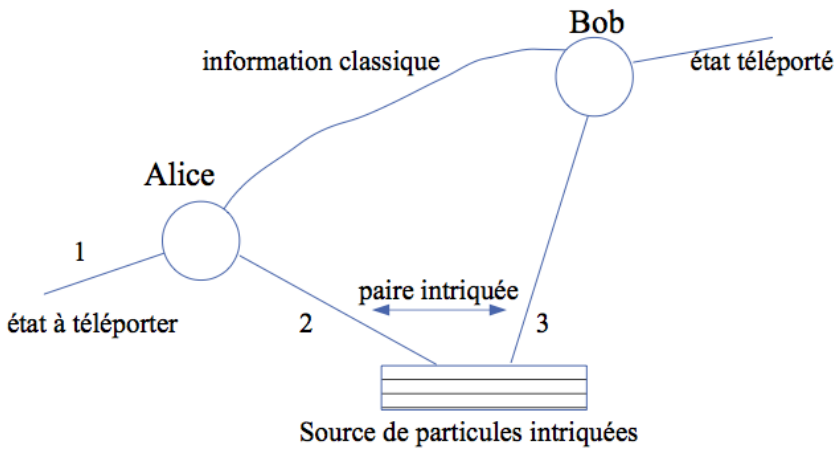

FIGURE 1 – Téléportation quantique : dispositif physique

Alice et Bob partagent une paire intriquée (appelée Etat de Bell / Bell state) produite par une source de particules intriquées (par exemple, une source de photons intriqués) :

$$|paire\rangle_{23} = \frac{|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}}{\sqrt{2}}$$

(dans la suite, on numérote 1, 2 et 3 respectivement le qubit à transmettre, le premier qubit et le second qubit de la paire intriquée — Bob ne reçoit que le second qubit de cette paire, à savoir le qubit numéro 3). Le fil "information classique" reliant Alice

et Bob représente un canal de communication classique, par exemple une ligne de téléphone.

Dans la suite, on notera $|\psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ et on exprimera les états successifs (au cours du déroulement du protocole) dans le base à 3 qubits $\{|000\rangle \dots |111\rangle\}$.

Q2. Donner l'expression de l'état complet initial.

Q3. Le protocole de téléportation quantique est le suivant :

— Alice applique une porte CNOT sur les deux qubits en sa possession (1 étant le qubit de contrôle, et 2 le qubit cible) : donner l'état correspondant.

— Alice applique une porte H au qubit numéro 1 : donner à nouveau l'état correspondant.

— Alice effectue une mesure conjointe sur les deux qubits en sa possession (1 et 2) : combien peut-elle trouver de résultats en tout ? Indiquer pour chaque résultat de mesure quel est l'état du système après la mesure ? Observer en particulier l'expression du qubit en possession de Bob...

— Alice transmet alors son résultat de mesure à Bob par téléphone. Quelle transformation Bob doit-il alors appliquer à son qubit (numéro 3) pour retrouver le qubit qui était initialement à transmettre ?

— Peut-on parler de téléportation instantanée ?

— Reprendre le protocole mais en utilisant une paire 1/2 non intriquée, par exemple $|paire\rangle_{23} = \frac{|00\rangle_{23}+|01\rangle_{23}}{\sqrt{2}}$. Ca fonctionne encore ?

2 Algorithme de Deutsch-Josza

Cet algorithme a été conçu par le mathématicien Deutsch dans les années 90. Il illustre comment un ordinateur quantique peut vertigineusement accélérer un algorithme classique. Cet algorithme est constitué de plusieurs portes de Hadamard "H" ainsi que d'une porte U_f qui opère comme indiqué Fig. 2. L'algorithme permet de trouver en **un seul "query"** (interrogation ou calcul de f) si f est une fonction dite *constante* ($f(0) = f(1)$) ou *équilibrée* ($f(0) \neq f(1)$).

Q4. Concevoir un algorithme classique qui permet de prouver que f est constante ou équilibrée. Combien de "query" de f sont nécessaire ? Comment le temps de calcul augmente-t-il avec le nombre de bits ?

Q5. Calculer $|x\rangle$ et $|y\rangle$ comme indiqué sur la figure (i.e., calculer l'action des portes H sur les kets d'entrée).

Q6. Ecrire la table de vérité de U_f.

Q7. Supposons pour simplifier que $|x\rangle = |0\rangle$ ou $|1\rangle$ (mais pas la superposition donnée par Q2), et que $|y\rangle$ est donné en revanche par le résultat de la Q2. Montrer que la sortie de U_f est proportionnelle à $|x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$.

Q8. En déduire la sortie de U_f dans le cas exact de la Q2.

Q9. La mesure quantique est réalisée après avoir appliqué une porte H sur la sortie x. Montrer que cela permet d'affirmer avec certitude si f est constante ou équilibrée.

Q10. Imaginer un algorithme qui permet d'étendre à des fonctions de deux variables, $f(x_1x_2)$. Combien de "query" de f sont nécessaire ?

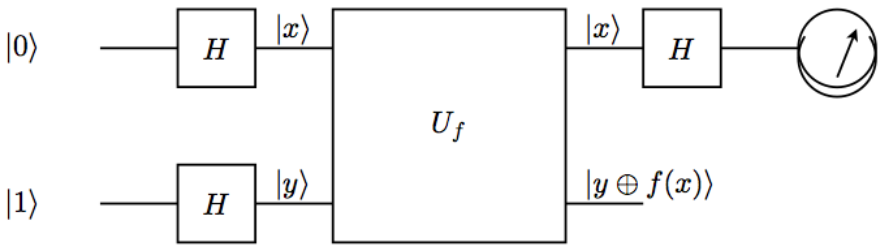

FIGURE 2 – Schéma du circuit quantique implémentant l'algorithme de Deutsch