

Option Info Quantique

Modalité : sans document ni calculatrice

Archives (sélection de questions depuis la création de l'option)

Q1. En quoi la réalisation technologique d'une mémoire est-elle le résultat d'un compromis entre deux contraintes antagonistes ?

Q2. Dessiner la sphère de Bloch et représenter $|0\rangle$, $|1\rangle$, $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$.

Q3. Calculer la matrice densité ρ lorsque le système quantique est un mélange statistique de 50% de l'état $|0\rangle$ et de 50% de l'état $|1\rangle$.

Q4. L'état quantique suivant $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ est-il intriqué ?

Q5. Montrer sur un exemple judicieusement choisi que la porte C-NOT permet de construire un état intriqué (=non-factorisable) à partir d'un état non-intriqué (=factorisable).

Q6. On définit la porte "phase-shift" de la manière suivante : elle laisse le qu-bit $|0\rangle$ inchangé, mais déphase le qu-bit $|1\rangle$ de $\pi/4$. Indiquer sa matrice :

$$S = \dots \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

puis la matrice $S \otimes S$ pour un système à 2 qu-bits :

$$S \otimes S = \dots \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Montrer que S est unitaire.

Q7. La porte SWAP est une porte à 2 qu-bits de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner la table de vérité de cette porte SWAP :

$$\begin{array}{l} |\psi_e\rangle \rightarrow |\psi_s\rangle \\ |00\rangle \rightarrow \dots \\ |01\rangle \rightarrow \dots \\ |10\rangle \rightarrow \dots \\ |11\rangle \rightarrow \dots \end{array}$$

Quelle opération réalise-t-elle ? Montrer que cette porte ne peut être factorisée en le produit tensoriel de deux portes à un qu-bit (indication : calculer le produit tensoriel de deux matrices 2×2 , et montrer que le résultat est incompatible avec la matrice de la porte SWAP).

Q8. On considère une collection de systèmes quantiques, dont 25% sont dans l'état $|0\rangle$, et les 75% restant dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Calculer la matrice densité ρ décrivant cette collection. Vérifier que cette matrice représente un état mixte (=non-pur).

Q9. Un canal *bit-flip* de probabilité p est un modèle d'erreur pouvant être décrit par une porte unitaire X avec la probabilité p , et par la matrice identité avec la probabilité $1 - p$. On injecte le qubit $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ dans le canal. Quelle est la matrice densité à la sortie du canal? Quand l'entropie est-elle maximale? Cela vous rappelle-t-il un résultat de théorie classique de l'information?

Q10. On considère le qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. On réalise une mesure sur ce qubit dans la base de calcul habituelle $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Quels sont les résultats possibles de mesure, et avec quelle probabilité? En déduire quels sont les états du qubit après la mesure et avec quelle probabilité. Utiliser ces résultats pour calculer la matrice densité ρ du système après la mesure. Quels termes de ρ décrivent le processus de décohérence? Pour quel qubit initial avons-nous à la fin un état pur? un état mixte? Calculer l'entropie de Von Neuman avant, et après la mesure. Comment interprétez-vous la variation d'entropie?

Q11. Soit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle$. Calculer la matrice densité correspondante ρ_{ab} . Est-ce un état pur? On applique maintenant la porte c-NOT à ce qubit. Calculer la matrice densité résultante ρ'_{ab} . Calculer la matrice densité réduite ρ'_a décrivant le premier qubit seulement, et commenter les propriétés de cette matrice densité réduite... ρ'_{ab} représente-t-elle un état séparable (=factorisable) ou intriqué (justifier)?