

# Option Informatique Quantique

Introduction aux portes quantiques

2016 (v2)

## 1 Introduction : qubits et circuits logiques quantiques

En logique booléenne *classique*, un état logique est représenté par un *bit* pouvant prendre deux valeurs, 0 **ou** 1. En logique quantique, on représente un état logique quantique par un *qubit* (quantum bit) écrit sous la forme d'un vecteur d'état quantique

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

où la normalisation de  $|\psi\rangle$  impose que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Expérimentalement (voir également partie 2), nous considérons que les deux états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  correspondent aux états  $|z+\rangle$  et  $|z-\rangle$  d'un spin. D'autres réalisations expérimentales existent, par exemple,  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  sont les deux premiers niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique. La différence fondamentale entre un bit classique et qubit est le fait que le second est généralement une *superposition* de deux états logiques 0 et 1. Dans cette partie, nous nous intéressons aux portes qu-logiques permettant de réaliser des opérations logiques sur ces qubits.

**Opération de mesure** Expérimentalement, la mesure de l'état d'un qubit peut être réalisée par un appareil de Stern-Gerlach mesurant la composant  $S_z$  d'un spin.

**Q1.** Les résultats possibles de la mesure étant 0 ou 1, quels sont en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ , les probabilités associées à chacun de ces résultats, et les états finals correspondants. On indiquera les postulats de la mécanique quantique invoqués.

**Matrices de Pauli - portes élémentaires** Une porte qu-logique  $U$  est un dispositif expérimental agissant de manière linéaire sur un qubit d'entrée  $|\psi_e\rangle$ , en fournissant un qubit de sortie  $|\psi_s\rangle = U|\psi_e\rangle$ , où  $U$  est pour l'instant une matrice  $2 \times 2$  de la forme

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On utilise dans la suite les trois matrices suivantes, appelées matrices de Pauli :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

définies dans la base  $\mathcal{B} = \{|0\rangle, |1\rangle$ . On reconnaîtra, à une constante multiplicative  $\hbar/2$  près, les observables de spin  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$ . Ces matrices permettent de construire des portes qu-logiques élémentaires. Par exemple, la porte logique  $Z$  (figure 2) transforme le qubit d'entrée  $|\psi_e\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  en qubit de sortie  $|\psi_s\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ .

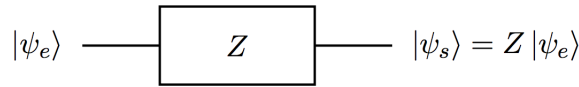


FIGURE 1 – Un exemple de porte qu-logique élémentaire : la porte Z.

**Q2.** Donner l'expression du qubit de sortie  $|\psi_s\rangle$  pour la porte logique X.

**Q3.** Donner la table de vérité de la porte qu-logique Y, i.e., remplir la table suivante :

$$\begin{array}{lcl} |\psi_e\rangle & \rightarrow & |\psi_s\rangle \\ |0\rangle & \rightarrow & ? \\ |1\rangle & \rightarrow & ? \end{array}$$

On se convaincra aisément que, en vertu de la linéarité de l'opération  $|\psi_s\rangle = U |\psi_e\rangle$ , on peut calculer  $|\psi_s\rangle$  pour un qubit  $|\psi_e\rangle$  quelconque à partir de la seule donnée de la table de vérité de la porte U.

**Q4.** On définit la porte H, dite *porte de Hadamard*, par la table de vérité suivante :

$$\begin{array}{lcl} |0\rangle & \rightarrow & (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \\ |1\rangle & \rightarrow & (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \end{array}$$

Indiquer la matrice H correspondante (à ne pas confondre avec l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$ !).

Pour la question suivante, on rappelle que la matrice adjointe  $U^\dagger$  d'une matrice U est la transposée de la conjuguée de cette matrice, i.e.,  ${}^T U^*$ , et que la relation duale de  $|\psi_s\rangle = U |\psi_e\rangle$  s'écrit  $\langle\psi_s| = \langle\psi_e| U^\dagger$ , où  $\langle\psi_e| = \alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|$ .

**Q5.** Montrer que la normalisation simultanée de  $|\psi_e\rangle$  et de  $|\psi_s\rangle$  impose que U soit, en toute généralité, une matrice unitaire, i.e., telle que  $U U^\dagger = \mathbf{1}$ .

Tout dispositif expérimental implémentant une porte qu-logique devra respecter cette condition dite d'unitarité.

**Q6.** Montrer que les portes X et H vérifient cette condition d'unitarité.

## 2 Réalisation expérimentale d'une porte à un qubit

Nous nous intéressons dans cette partie à la réalisation expérimentale d'un qubit via le spin d'un électron. Nous utiliserons la correspondance  $|0\rangle = |z+\rangle$  et  $|1\rangle = |z-\rangle$ , où  $|z+\rangle$  et  $|z-\rangle$  sont les états propres de l'observable de spin  $S_z$ . Les degrés de liberté spatiaux de l'électron sont négligés dans cette partie. On rappelle que le spin de l'électron "génère" un moment magnétique  $\mathbf{M} = q/m \mathbf{S}$ , où q et m sont la charge et la masse de l'électron.

On considère un électron placé dans un champ magnétique statique d'amplitude  $B_0$ , orientée positivement selon l'axe Oz.

**Q7.** Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le moment magnétique de spin de l'électron,  $\mathbf{M}$ , et le champ magnétique statique.

**Q8.** En déduire l'expression de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  du système dans la base  $\mathcal{B} = \{|z+\rangle, |z-\rangle\}$ , en fonction de  $\omega_0 = qB_0/m$ . Quels sont les niveaux d'énergie du système ?

L'état de spin de l'électron à l'instant  $t$  est décrit par le vecteur d'état  $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|z+\rangle + \beta(t)|z-\rangle$ .

**Q9.** En résolvant matriciellement l'équation de Schrödinger, indiquer l'expression de  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  en fonction de  $\alpha(0)$  et  $\beta(0)$ , et de  $\omega_0$ .

**Q10.** Combien de temps faut-il laisser agir le champ magnétique statique sur le spin de l'électron pour réaliser, à un facteur de phase globale près sur  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$ , une porte qu-logique Z? Pourquoi ce facteur de phase globale est-il non-significatif du point de vue de la mesure?

Afin de réaliser une porte X, on ajoute au champ statique précédent un champ magnétique tournant dans le plan xOy :  $\mathbf{B}_1(t) = B_1(\cos \omega t \mathbf{e}_x + \sin \omega t \mathbf{e}_y)$ . On posera  $\omega_1 = qB_1/m$ , et  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ .

**Q11.** Ecrire le nouvel Hamiltonien du système, puis les deux équations différentielles régissant l'évolution temporelle de  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$ .

Pour résoudre ce système d'équations, on se place dans le référentiel tournant avec le champ : on pose à cet effet  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)e^{-i\omega t/2}$  et  $\beta(t) = \tilde{\beta}(t)e^{i\omega t/2}$ .

**Q12.** Ecrire le système d'équations différentielles régissant  $\tilde{\alpha}(t)$  et  $\tilde{\beta}(t)$ .

**Q13.** Lorsque  $\Delta\omega = 0$ , résoudre pour  $\tilde{\alpha}(t)$  et  $\tilde{\beta}(t)$ , puis en déduire  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  en fonction de leurs valeurs à  $t = 0$ .

**Q14.** Combien de temps faut-il laisser agir le champ tournant pour réaliser, à un facteur de phase globale près, une porte qu-logique X?

On suppose qu'à  $t = 0$ , le spin est dans l'état pur  $|z+\rangle$ .

**Q15.** Calculer la probabilité  $P_{+-}(t)$  de trouver le spin dans l'état  $|z-\rangle$  à l'instant  $t$ .

**Q16.** A quel instant cette probabilité est-elle maximale? Montrer que la porte X consiste à faire basculer le spin de l'état  $|z+\rangle$  à l'état  $|z-\rangle$ . Quel est l'équivalent "classique" de cette opération logique quantique?

### 3 Circuits à deux qubits

Les circuits à deux qubits sont l'analogie quantique des portes logiques à deux entrées. On représente un état à deux qubits (un 2-qubit) par

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

Expérimentalement, il s'agit par exemple d'un système de deux spins A et B. Une des portes élémentaires les plus importantes en logique quantique est la porte "Controlled-NOT" (notée  $U_{CN}$ ), dont la matrice est donnée dans la base  $\mathcal{B} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  par

$$U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette porte est représentée figure 3.

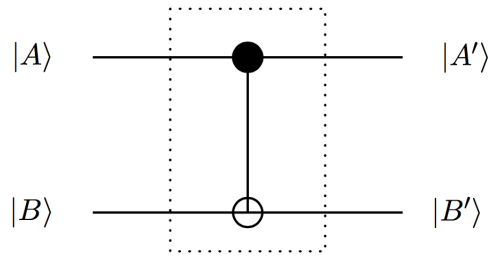


FIGURE 2 – Représentation graphique de la porte Controlled-NOT. Le 2-qubit d'entrée est symbolisé par  $|AB\rangle$ .

**Q17.** Donner la table de vérité de la porte qu-logique  $U_{CN}$ , i.e., remplir la table suivante :

$ \psi_e\rangle$	$\rightarrow$	$ \psi_s\rangle$
$ 00\rangle$	$\rightarrow$	?
$ 01\rangle$	$\rightarrow$	?
$ 10\rangle$	$\rightarrow$	?
$ 11\rangle$	$\rightarrow$	?

**Q18.** Montrer que cette porte permet de réaliser une inversion du second qubit (B) contrôlée par la valeur du premier qubit (A). En déduire l'expression du 2-qubit de sortie  $|\psi_s\rangle = |A'B'\rangle$  en fonction du 2-qubit d'entrée  $|\psi_e\rangle = |AB\rangle$  uniquement en terme d'opérations *ou-exclusif*.

**Application au calcul quantique parallélisé** On considère une fonction  $f(x) : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ . On suppose qu'on sait réaliser expérimentalement la porte qu-logique transformant  $|\psi_e\rangle = |AB\rangle$  en  $|\psi_s\rangle = |A'B'\rangle$ , avec  $A' = A$  et  $B' = B \oplus f(A)$ .

**Q19.** Donner la table de vérité de cette porte qu-logique.

**Q20.** En déduire l'expression de son action sur le 2-qubit d'entrée  $(|00\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ . En quoi cette opération permet-elle d'obtenir *simultanément* les valeurs de  $f(0)$  et  $f(1)$  ?