Chat de Schrödinger

Introduction

L'expérience du chat de Schrödinger fut imaginée en 1935 par l'un des pères fondateurs de la mécanique quantique, Erwin Schrödinger, afin mettre en évidence des lacunes supposées de cette description du monde.

En mécanique quantique, le monde microscopique est décrit en terme de probabilités et le déterminisme classique n'existe plus. On ne peut plus parler de la position d'une particule, mais seulement de sa probabilité de se trouver en un endroit donné. Ce concept est plutôt étrange, en tout cas très éloigné de notre expérience de la vie quotidienne. Mais comme la mécanique quantique a passé avec succès tous les tests expérimentaux inventés à ce jour, nous sommes bien obligés de l'accepter comme description de la réalité. Cependant, s'il est possible d'admettre que le monde microscopique est régi par les lois quantiques, cela devient plus difficile lorsque l'on parle de la vie de tous les jours.

L'expérience du chat de Schrödinger a justement été imaginée pour faire surgir l'indéterminisme microscopique dans le monde macroscopique de notre vie quotidienne. L'idée de Schrödinger consiste à placer un chat dans une boite fermée. Cette boite est pourvu d'un système destiné à tuer le chat (il s'agit évidemment d'une expérience de pensée.). Ce système est constitué d'un flacon de poison, d'une petite quantité de matière radioactive et d'un compteur Geiger. Lorsque la première désintégration d'un noyau radioactif se produit, le compteur Geiger réagit en déclenchant un mécanisme qui casse le flacon et libère le poison mortel. Ainsi, la désintégration d'un noyau radioactif, un processus microscopique, se traduit par la mort du chat, un événement macroscopique.

La désintégration d'un noyau radioactif est un processus purement quantique qui se décrit en termes de probabilités. Il est impossible de prévoir quel noyau se transformera en premier ou bien quand la première désintégration se produira. La seule chose que nous puissions calculer est la probabilité qu'un certain nombre de noyaux se soient désintégrés après un temps donné. Nous pouvons en particulier choisir une substance radioactive adéquate de telle façon qu'après cinq minutes, il y ait 50 pour cent de chances qu'un noyau se soit désintégré et 50 pour cent de chances que rien ne se soit produit.

Fermons donc la boite et patientons pendant cinq minutes. Puisque la désintégration radioactive s'exprime en termes de probabilités, le sort du chat ne peut être décrit qu'en termes similaires. Après cinq minutes, il y a donc 50 pour cent de chances que le chat soit mort et 50 pour cent de chances qu'il soit vivant.

Dans l'interprétation traditionnelle de la mécanique quantique, le chat n'est alors ni mort, ni vivant. Il se trouve dans une superposition de ces deux états. Ce n'est que lorsque nous ouvrons finalement la boite que l'un des deux états possibles devient la réalité. Le chat est alors soit vivant, soit mort.

L'interprétation traditionnelle de la mécanique quantique pose donc un problème. Il est possible d'imaginer qu'une particule se trouve dans une superposition d'états, chacun affecté d'une certaine probabilité. Cela devient en revanche très difficile lorsque l'on considère un objet macroscopique comme le chat en question. L'idée d'un animal ni mort, ni vivant, mais dans une superposition de ces états est plutôt difficile à accepter.

Ci-dessous le texte original de Schrödinger :

"One can even set up quite ridiculous cases. A cat is penned up in a steel chamber, along with the following diabolical device (which must be secured against direct interference by the cat): in a Geiger counter there is a tiny bit of radioactive substance, so small that perhaps in the course of one hour one of the atoms decays, but also, with equal probability, perhaps none; if it happens, the counter tube discharges and through a relay releases a hammer which shatters a small flask of hydrocyanic acid. If one has left this entire system to itself for an hour, one would say that the cat still lives if meanwhile no atom has decayed. The first atomic decay would have poisoned it. The Psi function for the entire system would express this by having in it the living and the dead cat (pardon the expression) mixed or smeared out in equal parts. It is typical of these cases that an indeterminacy originally restricted to the atomic domain becomes transformed into macroscopic indeterminacy, which can then be resolved by direct observation. That prevents us from so naively accepting as valid a "blurred model" for representing reality. In itself it would not embody anything unclear or contradictory. There is a difference between a shaky or out-of-focus photograph and a snapshot of clouds and fog banks."

Dans ce bureau d'étude, on cherchera à montrer que de telles superpositions d'états macroscopiques ne sont pas détectables en pratique : elles sont en effet extrêmement fragiles et un couplage très faible du système avec l'environnement suffit à détruire la superposition quantique des deux états macroscopiques.

Pour cette étude, on s'appuiera sur l'article suivant :

« Generating Quantum Mechanical Superposition of Macroscopically Distinguishable States via Amplitude Dispersion », B. Yurke and D. Stoler, Physical Review Letter 57, 13 (1986)

Partie I : Compréhension de l'article

L'objectif de cette partie est de s'assurer d'une compréhension globale de l'article sans rentrer dans les aspects théoriques. Cet article étant en première lecture d'un niveau de difficulté très élevé, on se contentera d'une approche très qualitative. On pourra par exemple en première lecture admettre le résultat de la formule (17) sans chercher à comprendre les résultats (9) à (17). Il n'est cependant pas dramatique que vous ne sachiez pas répondre dans l'immédiat aux questions qui suivent.

1. Résumer en quelques lignes le sujet et les enjeux de cet article.
2. Quel modèle physique est utilisé pour décrire un état quantique « macroscopique » ?
3. Par quelle méthode créé-t-on un état cohérent $|\alpha\rangle$ ou état de Glauber ?
4. Comment cet état cohérent se transforme en la superposition de deux états cohérents pour créer un état « chat de Schrödinger » ?
5. Cet état est-il viable ?
6. Quel est le paramètre qui engendre la « décohérence » d'un état quantique macroscopique, (i.e. la chute du facteur de visibilité des franges des figures 1 et 2) ?

Partie II : Etats quasi-classiques de l'oscillateur harmonique quantique

L'objectif de cette partie est de construire un état quantique de l'oscillateur harmonique qui conduit à des prévisions physiques quasi-identiques aux prévisions classiques. La fonction d'onde de cet état « quasi-classique » (ou cohérent) est décrit dans la formule (2) de l'article.

On remarquera que fondamentalement l'état quantique d'un système mécanique différera toujours d'un état classique car selon les inégalités de Heisenberg, il est impossible de déterminer simultanément la position et la quantité de mouvement d'un état quantique alors que c'est parfaitement possible pour un état classique.

Pour construire l'état quasi-classique nous allons dans un premier temps revisiter le modèle classique de l'oscillateur harmonique à une dimension.

1. Rappeler les équations classiques du mouvement d'un oscillateur harmonique à une dimension autour de sa position d'équilibre. On notera *x, p, m* et ω respectivement la position par rapport à l'équilibre, la quantité de mouvement, la masse et la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

On pose : $\hat{x}=\beta x$ et $\hat{p}=\frac{1}{\hbar\beta}p$ avec $\beta=\sqrt{m\omega/\hbar}$.

2. Réécrire les équations du système sous la forme :

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=...$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt}=...$$

On introduit le paramètre complexe $\alpha(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{x}+i\,\hat{p}]$.

3. Déterminer l'équation du système sous la forme : $\frac{d\alpha}{dt}=...$.

On fixe $\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{x}(0)+i\,\hat{p}(0)]$.

4. Représenter le mouvement de l'oscillateur dans le plan complexe $(\Im(\alpha),\Re(\alpha))$ [1].
5. Déterminer les expressions de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ en fonction de α et de son complexe conjugué $\bar{\alpha}$.
6. Déterminer l'expression de l'énergie totale *E* de l'oscillateur hamonique en fonction de $\hbar$, ω et α_0 .
7. Que dire de la valeur de $|\alpha_0|$ dans le cas d'un système macroscopique ?

La représentation précédente qui a le mérite de la simplicité, est formellement très proche du modèle de l'oscillateur harmonique quantique.

1 Ce plan est appelé le plan de phase

Dans le modèle quantique[1], on introduit

les opérateurs de « position et d'impulsion normalisés »[2] :

$$\hat{X} = \beta X \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{1}{\hbar \beta} P \quad ,$$

les opérateurs création et annihilation :

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{X} - i\hat{P}] \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{X} + i\hat{P}] \quad ,$$

ainsi que l'opérateur nombre :

$$N = a^\dagger a \quad .$$

8. Déterminer les expression des opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ en fonction de a et $a^\dagger$. Comparer avec le résultat de la question 5.
9. Déterminer l'expression de l'hamiltonien H du système en fonction de $\hbar$, ω et N. On rappelle la valeur du commutateur $[a, a^\dagger] = 1$.

On cherche maintenant un état $|\psi(t)\rangle$ du système pour lequel les paramètres classiques sont proches des valeurs moyennes des observables quantiques :

- $\langle \hat{X} \rangle_\psi(t) \approx \hat{x}(t)$
- $\langle \hat{P} \rangle_\psi(t) \approx \hat{p}(t)$
- $\langle H \rangle_\psi(t) \approx E$

10. A partir du théorème d'Erhenfest, déterminer les expressions de $\langle a \rangle_\psi(t) = \langle \psi(t)|a|\psi(t)\rangle$ et $\langle a^\dagger \rangle_\psi(t) = \langle \psi(t)|a^\dagger|\psi(t)\rangle$ en fonction de $\langle a \rangle_\psi(0) = \langle \psi(0)|a|\psi(0)\rangle$.
11. En déduire les expressions de $\langle \hat{X} \rangle_\psi(t)$ et $\langle \hat{P} \rangle_\psi(t)$. Comparer ces résultats à ceux de la question 5. En déduire les équations : $\langle a \rangle_\psi(0) = \alpha_0$ et $\langle a^\dagger a \rangle_\psi(0) = |\alpha_0|^2$.
12. Montrer alors que pour un état quantique macroscopique : $\langle H \rangle_\psi(t) \approx E$.

En principe les équations établies à la question 12 suffisent à déterminer l'état $|\psi(0)\rangle$.

13. Montrer que $\|(a - \alpha_0)|\psi(0)\rangle\|^2 = 0$. En déduire que $|\psi(0)\rangle$ est vecteur propre de l'opérateur a associé à la valeur propre α_0 .

On note $|\phi_n\rangle$ l'état propre de l'Hamiltonien H associé à la valeur propre $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. On rappelle les propriétés suivantes :

- $a^\dagger |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle$
- $a |\phi_n\rangle = \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle$

1 cf. polycopié p95-104
2 On remarquera que ces opérateurs sont sans dimension

On cherche maintenant la forme des vecteurs propres de l'opérateur a sous la forme : $|\psi_\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha)|\phi_n\rangle$.

14. Montrer que $c_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n(\alpha)$. En déduire l'expression de $c_n(\alpha)$ en fonction de $c_0(\alpha)$.
15. En normalisant la fonction d'onde $|\psi_\alpha\rangle$ en déduire la valeur de $c_0(\alpha)$ puis le résultats de la formule (2) de l'article (en remplaçant $|\alpha\rangle$ par $|\psi_\alpha\rangle$ et $|\phi_n\rangle$ par son expression contractée $|n\rangle$).

Pour obtenir l'expression de $|\psi(0)\rangle$, il suffit de remplacer α par α_0 dans la formule (2).

16. Déterminer et représenter graphiquement en fonction de n, la probabilité d'obtenir $H = E_n$ lors d'une mesure de l'énergie du système dans l'état $|\psi(0)\rangle$.
17. Calculer $\delta H_{\alpha_0} = \sqrt{\langle H\rangle_{\alpha_0}^2 - \langle H^2\rangle_{\alpha_0}}$ puis le rapport $\frac{\delta H_{\alpha_0}}{\langle H\rangle_{\alpha_0}}$. Interpréter ces résultats pour des valeurs de $|\alpha_0| \gg 1$.
18. Calculer $\delta X_{\alpha_0} = \sqrt{\langle X\rangle_{\alpha_0}^2 - \langle X^2\rangle_{\alpha_0}}$ et $\delta P_{\alpha_0} = \sqrt{\langle P\rangle_{\alpha_0}^2 - \langle P^2\rangle_{\alpha_0}}$.

    Montrer que $\delta X_{\alpha_0} \delta P_{\alpha_0} = \hbar/2$

On peut montrer que la fonction d'onde de l'état quasi-classique s'écrit en fonction de x :

$$\psi_{\alpha_0}(x) = \langle x|\psi_{\alpha_0}\rangle = \mathrm{e}^{(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2)/4} e^{\langle P\rangle_{\psi_{\alpha_0}} x/\sqrt{2}} \phi_0(x - \langle X\rangle_{\psi_{\alpha_0}}) ,$$

avec $\phi_0(x) = (\beta/\pi)^{1/4} \mathrm{e}^{-\beta^2 x^2/2}$.

19. Etant donnée une position moyenne à l'instant t_0, $\langle X\rangle_{\psi_{alpha}}(t_0) = x_0$, de l'état quasi-classique, Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de l'état en fonction de x dans les cas où $|\alpha_0| = 1$ et $|\alpha_0| \gg 1$. Interprétation ?
20. Montrer que le paquet d'onde ne se déforme pas durant les oscillations de l'état quasi-classique. Interprétation ? (on rappelle que lors d'une propagation « libre », un paquet d'onde à tendance naturellement à se déformer (phénomène de dispersion), cf. polycopié p. 75-79)

Prenons un cas concret d'un pendule macroscopique

- de masse : $m = 1\ kg$,
- de longueur : $l = 0,1\ m$
- oscillant à la période : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 0{,}63\, s$ $(\omega = 10\, rd/s)$
- avec une amplitude $x_m = 1\, cm$.

21. Calculer $|\alpha_0|$.

22. Calculer δX_{α_0} . Interprétation ?

Partie III : Fabrication d'un état « chat de Schrödinger »

L'objectif de cette partie est de contruire l'état « chat de Schrödinger » de la formule (7) de l'article.

1. D'après la formule (1) de l'article quel terme faut-il rajouter dans l'Hamiltonien du système de la partie II pour construire un état « chat de Schrödinger » ? Par quel moyen expérimental peut-on envisager d'obtenir un tel état ?

On note $H_{NL}=\hbar\Omega\hat{N}^2$ le potentiel anharmonique de la fomule (1).

On suppose que durant la durée T de son interaction avec le potentiel anharmonique, l'état quasi-classique n'a pas eu le temps d'évoluer temporellement, ce qui se traduit par $\omega T \ll 1$.

On suppose qu'à l'instant initial, le système est dans l'état quasi-classique :

$$|\psi(0)\rangle=|\psi_\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\phi_n\rangle \quad \text{(cf. formule (2) avec les notation du B.E.)}$$

2. Montrer que $|\phi_n\rangle$ est un état propre de $H=\hbar\Omega\hat{N}^2$ associé à la valeur propre $\hbar\Omega\hat{n}^2$.
3. Déterminer l'expression de l'évolution temporelle de l'état quasi-classique $|\psi(t)\rangle$.
4. Montrer que $|\psi(2\pi/\Omega)\rangle=|\psi_\alpha\rangle=|\alpha\rangle$ et $|\psi(\pi/\Omega)\rangle=|\psi_{-\alpha}\rangle=|-\alpha\rangle$.
5. En utilisant la relation $\mathrm{e}^{-i\pi n^2/2}=\frac{1}{2}[(1-i)+(1+i)(-1)^n]$, montrer que l'expression de $|\psi(\pi/2\Omega)\rangle=|\alpha,\pi/2\Omega\rangle$ correspond bien à la formule (7).

Partie IV : Le chat est-il mort et/ou vivant ?

L'objectif de cette partie est d'interpréter les résultats des figures 1 et 2 de l'article. A cette fin nous utiliserons une approche plus simple et plus directe (mais moins proche de la réalité expérimentale) que celle développée à travers les formules (9) à (17).

Après interaction avec le potentiel anharmonique (cf. partie II), le système se retrouve dans un état « chat de Schrödinger » caractérisé par la fonction d'onde $|\psi(\pi/2\Omega)\rangle=|\alpha,\pi/2\Omega\rangle$ de la formule (7).

On étudie le cas particulier où α s'écrit sous la forme : $\alpha=i\rho$.

1. A l'aide des résultats des questions 1 à 4 de la partie I et de celui de la question 20 de la partie II, montrer que cette situation correspond à la superposition de deux états quasi-classiques (ou paquets d'ondes) centrés sur *x = 0* et de vitesses opposées (ou quantité de mouvement).
2. Déterminer l'expression de la fonction d'onde $\psi(x,\pi/2\Omega)$.

3. Montrer que l'expression non normalisée de la probabilité de présence *P(x)* du système au point *x*, s'écrit sous la forme : $P(x) \propto \mathrm{e}^{-\beta^2 x^2} \cos^2(\sqrt{2}\beta x - \pi/4)$.
4. Représenter l'allure de P(x) avec la valeur de $|\alpha|$ de la figure 2. Comparer au résultat de la figure 2 (a).
5. Avec quelle précision faut-il être capable de mesurer *P(x)* pour pouvoir observer une superposition cohérente (i.e. les franges d'interférences, i.e. un chat à la fois mort et vivant !!) d'états quasi-classiques ? Conclure qu'en réalité, la probabilité *P(x)* doit ressembler à celle de la figure 2 (c).

On pourra éventuellement sauter les dernières questions de cette partie.

Le passage de la représentation en fonction de *x*, $\psi(x)$ de la fonction de la fonction d'onde à sa représentation en fonction de *p*, $\tilde{\phi}(p)$ s'effectue par la transformation de Fourier :

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, \mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\, dx \quad .$$

6. Déterminer l'expression de la fonction d'onde $\tilde{\phi}(p, \pi/2\Omega)$.
7. Représenter $\tilde{\phi}(p, \pi/2\Omega)$ avec la valeur de $|\alpha|$ de la figure 2. A quelle condition sur la précision d'une mesure de p est-il possible de mesurer les quantités de mouvement des deux états quasi-classiques ? Est-il paradoxal qu'on puisse mesurer la quantité de mouvement de chacun des états quasi-classiques sans pour autant pouvoir les discerner ?

Partie V : Fragilité d'un « état chat de Schrödinger »

L'objectif de cette partie est de montrer qu'un système « chat de Schrödinger » disparaît quasi-instantanement à cause de son couplage avec l'environnement.

Le couplage d'un état quasi-classique initialement dans l'état $|\alpha_0\rangle$ avec son environnement dans un état initial qu'on « modélisera » aussi par $|\chi_e(0)\rangle$ s'écrit $|\Phi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes |\chi_e(0)\rangle$ [1].

En l'absence de couplage entre l'état quasi-classique et l'environnement, chaque système évolue indépendamment et l'état devient global peut s'écrire : $|\Phi(t)\rangle = |\alpha_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}\rangle \otimes |\chi_e(0)\rangle$.

Dans le cas d'un couplage entre l'état quasi-classique et l'environnement, on ajoute un terme d'amortissement de tel sorte que l'état global s'écrive sous la forme :

$$|\Phi(t)\rangle = |\alpha_0 \mathrm{e}^{-i\omega t} \mathrm{e}^{-\gamma t}\rangle \otimes |\chi_e(0)\rangle \quad .$$

1. Déterminer l'énergie moyenne $\langle E \rangle(t)$ d'un état quasi-classique dans le cas d'un couplage avec son environnement.
2. Montrer que lorsque $2\gamma t \ll 1$, on peut écrire : $\langle E \rangle(0) - \langle E \rangle(t) \approx 2\hbar\omega |\alpha_0|^2 \gamma t$. Que représente l'énergie $\langle E \rangle(0) - \langle E \rangle(t)$?
3. Déterminer l'expression de l'état initial $|\psi(0)\rangle$ d'un état « chat de Schrödinger » couplé à son environnement.

1 cf. annexe 1 pour la signification du produit tensoriel d'état

A l'instant ultérieur, cet état se met sous la forme :

$$|\Phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}^{-i\pi/4}|\alpha_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{e}^{-\gamma t}\rangle \otimes |\chi_e^1(t)\rangle + \mathrm{e}^{i\pi/4}|-\alpha_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{e}^{-\gamma t}\rangle \otimes |\chi_e^2(t)\rangle) \quad ,$$

où $|\chi_e^1(t)\rangle$ et $|\chi_e^2(t)\rangle$ sont deux états normés *à priori* différents mais non orthogonaux de l'environnement.

4. Montrer que la probabilité de présence *P(x)* s'écrit sous la forme : $P(x) \propto [\mathrm{e}^{-\beta^2 x^2}\cos^2(\sqrt{2}\beta x - \pi/4) + \eta\, e^{-\beta^2 x^2}\cos(2\sqrt{2}\beta x)]$ où $\eta = \langle \chi_e^1(t)|\chi_e^2(t)\rangle$ (on supposera η réel).
5. Représenter graphiquement P(x) lorsque $\eta \approx 1$ et $\eta \ll 1$ .Comparer vos graphiques à celui de la figure 2(c).

Dans un modèle très simplifié, l'environnement est constitué d'un deuxième oscillateur, de même masse, de même pulsation que le premier. On suppose que ce deuxième oscillateur est initialement dans son état fondamental $|\chi_e(0)\rangle = |\phi_0\rangle$.

Pour un couplage quadratique des deux oscillateurs, on admettra :

- que les états $|\chi_e^{1,2}(t)\rangle$ sont des états quasi-classiques, $|\chi_e^{1,2}(t)\rangle = |\pm\beta\rangle$.
- et que pour des temps courts $(\gamma t \ll 1)$: $|\beta|^2 = 2\gamma t|\alpha_0|^2$.

6. Montrer que $\eta = \mathrm{e}^{-2|\beta|^2}$.
7. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer la valeur typique du transfert d'énergie entre deux oscillateurs au dessus de laquelle la différence entre superposition cohérente (i.e. interférences) et mélange statistique (absence d'interférences) devient inobservable.
8. En reprenant le pendule macroscopique de la partie II (questions 22 et 23) et en supposant que la constante de temps d'amortissement de l'énergie est d'une année (cas par exemple d'un pendule suspendu sous vide sans frottements), évaluer le temps pendant lequel un état « chat de Schrödinger » est observable. Commenter le résultat obtenu.

Partie VI : Conclusions

Résumer l'ensemble de vos résultats théoriques et donner en quelques lignes vos conclusion sur cette histoire de chat.

Annexe 1 : Produits tensoriel d'espaces de Hilbert

1. Définition du produit tensoriel d'espaces de Hilbert

Pour définir généralement la notion de produit tensoriel d'espaces de Hilbert, considérons deux espaces de Hilbert ***E*** et ***F***. On peut leur associer un troisième espace de Hilbert ***G*** et une application bilinéaire T du produit direct ***E***⊗***F*** dans ***G*** tels que :

- *T(**E**⊗**F**)* engendre ***G***, c'est-à-dire que tout élément de ***G*** est somme (éventuellement infinie) d'éléments de la forme $T(|u\rangle,|v\rangle)$.
- Soit une base hilbertienne $\{|e_m\rangle\}$ de ***E*** et une une base hilbertienne $\{|f_n\rangle\}$ de ***F***. Alors la famille $\{T(|e_m\rangle,|f_n\rangle)\}$ est une base de ***G***.

L'espace G est appelé produit tensoriel de E et F et noté ***G*** = ***E***⊗***F***. On pose $T(|u\rangle,|v\rangle)=|u\rangle\otimes|v\rangle$.
Les éléments de ***E***⊗***F*** sont appelés tenseurs; ils ont, en vertu de ce qui précède, la forme générale :
$$|\phi\rangle=\sum_{m,n} C_{m,n}|e_m\rangle\otimes|f_n\rangle \quad .$$
Les éléments de la forme $|u\rangle\otimes|v\rangle$ sont dits *factorisés*. Tout tenseur s'écrit de façon non unique comme somme (éventuellement infinie) de tenseurs factorisés.

2. Espaces de Hilbert et degrés de liberté

Pour définir l'espace de Hilbert dans lequel on peut décrire complètement l'état d'un système quantique, introduisons la notion de degré de liberté d'un système. Une particule en mouvement dans l'espace a trois degrés de liberté. Un système de deux particules en mouvement dans l'espace a donc six degrés de liberté, etc. Une particule quantique peut également avoir un moment cinétique intrinsèque (son spin, i.e. son état de polarisation pour un photon), ce qui lui confère un degré de liberté supplémentaire.

Chaque degré de liberté est décrit dans un espace de Hilbert donné. Par exemple, le mouvement suivant x se décrit dans l'espace des fonctions de carré sommable de la variable x, $L^2(R)$. On postule qu'un système donné comportant N degrés de liberté est décrit dans l'espace de Hilbert ***E*** produit tensoriel des espace de Hilbert respectifs $\boldsymbol{E_i}$, i=1,2,...,N dans lesquels sont décrits ces N degrés de liberté : $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1}\otimes\boldsymbol{E_2}\otimes...\otimes\boldsymbol{E_N}$.

3. Propriétés du produit tensoriel

a) Si ***E*** et ***F*** sont de dimension finie N_E et N_F, la dimension de ***G*** = ***E***⊗***F*** est $N_G= N_E\, N_F$.

b) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il est commode d'utiliser les notations compactes :
$$|u\rangle\otimes|v\rangle=|u\rangle|v\rangle=|u,v\rangle \quad .$$

c) Le produit scalaire hermitien de deux kets facorisés $|\phi\rangle=|u\rangle\otimes|v\rangle$ et $|\chi\rangle=|u'\rangle\otimes|v'\rangle$ se facorise et vaut : $\langle\chi|\phi\rangle=\langle u'|u\rangle\langle v'|v\rangle$.

4. Opérateurs dans l'espace produit tensoriel

Considérons maintenant deux opérateurs A_E et B_F agissant respectivement dans ***E*** et ***F***. On peut définir le produit tensoriel des opérateurs A_E et B_F : $C_G = A_E \otimes B_F$ par la règle :
$$(A_E\otimes B_F)(|u\rangle\otimes|v\rangle)=(A_E|u\rangle)\otimes(B_F|v\rangle) \quad .$$

Cela permet de définir l'action de C_G sur les éléments de la base factoriée $\{|m\rangle\otimes|n\rangle\}$ et par conséquent sur tout vecteur de $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{F}$.

En particulier, nous pouvons *prolonger* l'opérateur A_E dans $\boldsymbol{G}$ par $A_E = A_E \otimes \boldsymbol{I}_F$, où $\boldsymbol{I}_F$ est l'opérateur identité dans $\boldsymbol{F}$.

5. Exemple simple : boîte cubique

Dans l'étude quantique d'une particule dans une boîte cubique tri-dimensionnelle de coté L, il est commode de séparer le mouvement de la particule suivant x, y, z et de chercher les solutions particulières de la forme :

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}(x,y,z)=\psi_{n_1}\psi_{n_2}\psi_{n_3}\propto\sin(n_1\pi\, x/L)\sin(n_2\pi\, x/L)\sin(n_3\pi\, x/L) \quad .$$

Dans la terminologie du produit tensoriel, ce sont des tenseurs décomposables. Une fonction d'onde générale peut alors s'écrire en fonction de cette base factorisée :

$$\psi(x,y,z)=\sum_{n_1,n_2,n_3} C_{n_1,n_2,n_3}\psi_{n_1,n_2,n_3}(x,y,z) \quad .$$

Des exemples plus subtils de produits tensoriels d'espaces de Hilbert concernent les cas de particules ayant des degrés de liberté internes, par exemple un spin.