
Physique quantique

Physique des particules et détection des particules chargées

Ce sujet est divisé en deux parties :

- la première partie (physique des particules) s'intéresse à la détection de l'oscillation des mésons K, problème qui a intrigué les physiciens pendant plusieurs décennies ;
- la seconde partie (physique nucléaire) a pour objectif l'étude du principe de la détection de particules chargées rapides (électrons β^- , ions lourds, mésons, particules α, \dots). Ces détecteurs, notamment à **semiconducteurs**, sont utilisés entre autres au sein des accélérateurs, des instruments d'imagerie médicale, des compteurs de radiation ... L'application envisagée est l'étude du mécanisme de spallation du noyau.

Un certain nombre d'articles sont fournis à titre d'illustration de chacune de ces deux parties.

1 Les oscillations des mésons K^0/\bar{K}^0

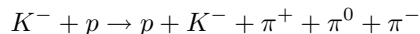
1.1 Notions sur les collisions inélastiques

Une **collision inélastique** est une collision au cours de laquelle des particules sont créées et d'autres annihilées, sans que le nombre de particule ne se conserve nécessairement.

L'**interaction forte** entre particules élémentaires est l'une des quatre interactions fondamentales de l'Univers (les trois autres sont la gravitation, l'interaction électromagnétique et l'interaction faible responsable de la désintégration du noyau). Elle est notamment responsable de la cohésion du noyau atomique, en assurant l'interaction attractive des protons et des neutrons entre eux, et intervient également dans de nombreuses collisions entre *baryons* et *mésons*.

Les **baryons** sont des particules lourdes, parmi lesquelles on trouve le **proton** (noté p) et le **neutron** (noté n), mais également d'autres particules produites dans les accélérateurs de particules ou dans le rayonnement cosmique, comme la particule neutre Λ^0 .

Les **mésons** sont, au contraire, des particules légères¹ qui sont produites, par exemple, lors de collisions entre protons. On distingue notamment les mésons π (dans différents états de charge électrique : π^+, π^0, π^-) et les mésons K (eux aussi chargés ou neutres). Voici un exemple de collision inélastique dans laquelle un méson K^- et un proton interagissent par interaction forte,



et conduisent (si l'énergie cinétique du proton et du méson K incident est suffisante) à la création de trois mésons π de charge différente.

Dans une collision quelconque, plusieurs quantités sont conservées : l'énergie totale (incluant l'énergie de masse $E_0 = mc^2$), la quantité de mouvement, la charge électrique Q_e . Dans une collision par *interaction forte* (celles que nous considérons dans ce problème) sont également conservées le **nombre baryonique B** et le **nombre d'étrangeté S** (strangeness), selon la même règle que la charge électrique : la somme des nombres baryonique doit être la même avant et après la collision (de même pour les nombres

¹On sait depuis les années 60 que mésons et baryons sont en fait composées de particules plus élémentaires appelées

d'étrangeté). Le tableau suivant donne les valeurs de Q_e , B et S pour quelques particules.

	baryons			mésons						
	p	n	Λ^0	π^-	π^0	π^+	K^-	K^0	\bar{K}^0	K^+
Q_e	+1	0	0	-1	0	+1	-1	0	0	+1
B	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0
S	0	0	-1	0	0	0	-1	+1	-1	+1

Ces nombres B et S ont été introduits, à l'instar de la charge électrique, pour rendre compte du fait que certains réactions ne peuvent avoir lieu.

Chaque particule admet une **anti-particule**, de même masse, mais de charge électrique, de nombres baryonique et d'étrangeté **opposés** : ainsi, l'anti-proton, noté \bar{p} , possède une charge électrique $Q_e = -1$, un nombre baryonique $B = -1$, un nombre d'étrangeté $S = 0$; le méson \bar{K}^0 , antiparticule du méson K^0 , possède une charge électrique nulle, un nombre baryonique nul, et un nombre d'étrangeté $S = -1$.

A titre d'illustration, la réaction suivante $K^- + p \rightarrow p + K^- + p + \bar{p}$ conserve Q_e , B et S et peut avoir lieu, mais la réaction $K^- + p \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^0$, si elle conserve bien Q_e et S , ne conserve pas B ($B = 1$ avant, $B = 0$ après) : elle ne peut pas avoir lieu lorsque un méson K^- et un proton collisionnent.

Q1. (2) Pour chacune des collisions suivantes entre un méson et un proton, indiquer si la réaction peut avoir lieu, et sinon, pourquoi :

1. $K^- + p \rightarrow K^- + p + \pi^+$
2. $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$
3. $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
4. $K^- + p \rightarrow K^- + p + n$
5. $K^- + p \rightarrow K^- + p + K^0$
6. $K^- + p \rightarrow p + \pi^-$
7. $K^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$
8. $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$
9. $\pi^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + \Lambda^0$

1.2 La détection des mésons K^0 et \bar{K}^0

Les détecteurs de particules permettent de détecter uniquement des particules chargées : en plongeant le détecteur dans un champ magnétique qui courbe la trajectoire en fonction de la charge électrique de la particule (rayon de courbure Q_e/m), on peut aisément distinguer un méson K^+ d'un méson K^- par exemple.

De fait, les particules (neutres) K^0 et \bar{K}^0 (qui ne diffèrent que par leur nombre d'étrangeté) sont très difficiles à distinguer dans un détecteur de particule. Pour les distinguer, on exploite le fait qu'un seul de ces deux mésons neutres peut produire un baryon Λ^0 lors d'une collision avec un proton du détecteur, ce baryon Λ^0 se désintégrant ensuite (en $\sim 0.1ns$) en deux particules chargées par la réaction $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$ (ce qui le rend alors indirectement détectable, cf. figure 1).

Q2. (1) Montrer que, dans le système (K^0, \bar{K}^0) , seul \bar{K}^0 peut, lors d'une collision avec un proton, produire un baryon Λ^0 accompagné d'un méson π^+ .

1.3 Les oscillations du système (K^0, \bar{K}^0)

Dans les années 60, on a pu observer que le méson K^0 pouvait parfois produire un baryon Λ^0 lors d'une collision avec un proton du détecteur, en contradiction avec la nécessaire conservation du nombre d'étrangeté. Cette observation expérimentale a conduit Murray Gell-Mann et Pais à postuler que le méson K^0 pouvaient (parfois) se transformer spontanément en \bar{K}^0 .

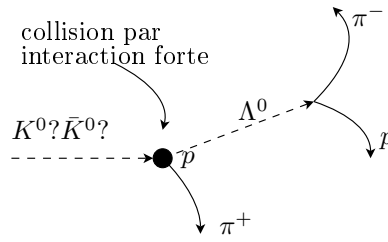


FIG. 1 – Détection indirecte d’un méson K neutre. Noter que, contrairement aux collisions par interaction forte, les désintégrations spontanées (ici de Λ^0) ne conserve pas le nombre d’étrangeté S en général.

On modélise alors le système (K^0, \bar{K}^0) comme une « particule » quantique à deux états, notés $|K^0\rangle$ et $|\bar{K}^0\rangle$, où le vecteur (normé)

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |K^0\rangle + \beta(t) |\bar{K}^0\rangle$$

représente l’état du système à l’instant t . Les nombres $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ représentent alors les probabilités respectives de détecter (indirectement) un méson K^0 ou un méson \bar{K}^0 dans le détecteur. Cette modélisation est formellement analogue à celle d’une particule de spin $1/2$.

Q3. (1) Quelles valeurs doivent posséder $|\alpha|$ et $|\beta|$ pour que l’on soit certain d’observer un méson \bar{K}^0 ?

Q4. (1) A l’instant $t = 0$, un méson K^0 est produit via la réaction $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$: que vaut $|\psi(0)\rangle$ (i.e. indiquer $\alpha(0)$ et $\beta(0)$) ?

L’évolution temporelle du vecteur d’état de la « particule » (K^0, \bar{K}^0) est décrit par l’équation de Schrödinger. On prend pour Hamiltonien la matrice suivante :

$$H = \begin{pmatrix} A + E_0 & A \\ A & E_0 + A \end{pmatrix}$$

où A traduit le couplage entre les états K^0 et \bar{K}^0 , et E_0 est l’énergie au repos (mc^2) de la « particule » en l’absence de couplage.

Q5. (1) Rappeler l’expression de l’équation de Schrödinger. En déduire les deux équations différentielles dont $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont solutions.

Q6. (1) Résoudre lorsque $A = 0$. Montrer que dans ce cas, K^0 n’a aucune possibilité de se transformer spontanément en un méson \bar{K}^0 (on considérera l’évolution de l’état initial $|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle$).

Q7. (2) Résoudre de même lorsque $A \neq 0$ (on posera $c_1 = \alpha + \beta$ et $c_2 = \alpha - \beta$).

L’expérience montre que A est un nombre complexe de la forme $A = a - bi$, avec $b/\hbar \sim 10^{10} s^{-1}$. On considère toujours que l’état du système à l’instant t est $|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle$.

Q8. (2) Exprimer $\beta(t)$, puis la probabilité $\mathcal{P}_{K^0 \rightarrow \bar{K}^0}$ de détecter un méson \bar{K}^0 à l’instant t , en fonction de a et b .

Q9. (2) Tracer l’allure de $\mathcal{P}_{K^0 \rightarrow \bar{K}^0}$ pour $a = 4\pi b$ puis pour $a = \pi b$. Quel interprétation pouvez-vous donner du paramètre b ?

2 Détection de particules par perte d’énergie - application au mécanisme de spallation du noyau

2.1 Approche quantique de la diffusion non-élastique

Le mécanisme fondamental à la base de la détection de particule par **perte d’énergie** est la diffusion **inélastique**, i.e. avec changement de nature des particules. Lorsqu’une

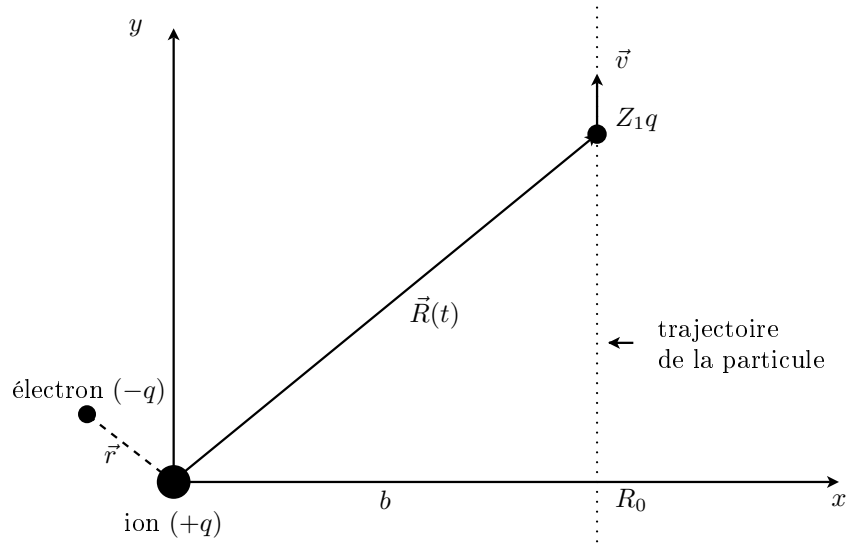


FIG. 2 – Interaction d’une particule chargée avec un électron atomique; en réalité, l’électron atomique est naturellement délocalisé; en revanche, la vitesse élevée de la particule permet de la décrire de manière classique.

particule chargée traverse le matériau constituant le détecteur, elle cède progressivement, à chaque diffusion, son énergie aux électrons atomiques du matériau. Ces électrons, généralement situés sur des orbitales atomiques périphériques, passent alors dans un état excité, voire dans le continuum (ionisation). Il y a, par exemple, augmentation de la conduction électrique, et la mesure de l’impulsion de courant qui en résulte permet de déterminer l’énergie cédée par la particule, et si le détecteur est de petite taille, sa localisation spatiale.

La perte d’énergie de la particule incidente est calculée en étudiant comment l’état $|\psi(t)\rangle$ de l’électron atomique est modifié par le passage d’une particule chargée dans son voisinage. En l’occurrence, le champ électrique créé par la particule mobile — champ qui est donc constant dans son référentiel — est vu dans le référentiel de l’électron comme un champ dépendant du temps : à l’instar d’une onde électromagnétique, ce champ électrique variable peut provoquer une transition énergétique au sein de l’atome. La conservation de l’énergie impose alors que la particule mobile perde ce que l’atome a gagné.

Pour simplifier le problème, on fait les hypothèses suivantes :

- l’atome possède un seul électron périphérique, l’ensemble du noyau et du cœur des électrons internes étant traité comme une particule immobile de charge $+q$;
- la particule incidente, de charge Z_1q , est lourde, et sa vitesse est suffisante pour que son mouvement soit approximativement rectiligne uniforme, de vitesse \vec{v} , tout du moins pendant la durée d’une interaction² ; sa quantité de mouvement est suffisamment élevée pour qu’on puisse la décrire comme une particule classique.

On se place dans le plan (xOy) défini par la trajectoire de la particule et le centre de gravité de l’atome que l’on prend comme origine des coordonnées (figure 2). On note :

- $\vec{R}(t)$ la position de la particule à l’instant t ,
- $\vec{r} = \{x, y, z\}$ les coordonnées de l’électron périphérique de l’atome,
- b le paramètre d’impact, *i.e.* la distance entre la trajectoire de la particule et l’atome.
- E_n les niveaux d’énergie, et n les états stationnaires de l’atome isolé (et par concision $|n\rangle$ en notation de Dirac).

L’instant $t = 0$ est défini par le passage de la particule au point R_0 de coordonnées $(x = b, y = 0)$. On posera $e^2 = q^2/4\pi\epsilon_0$.

²En réalité, sa trajectoire est une hyperbole.

2.2 Potentiel électrostatique crée par la particule chargée

Q10. Déterminer l'énergie potentielle électrostatique $V(t)$ à laquelle est soumise l'électron atomique lors du passage de la particule chargée.

Q11. On suppose que le paramètre d'impact b est beaucoup plus grand que les distances intra-atomiques typiques, *i.e.* $b \gg |\vec{r}|$. Dans ces conditions, $|\vec{R}(t)| \gg |\vec{r}|, \forall t$. Remplacer alors $V(t)$ par son développement dipolaire au premier ordre puis exprimer le résultat en fonction de x, y, b, \vec{v} et t .

3 Probabilité de transition énergétique de l'atome

A l'instant « initial » $t = -\infty$, l'électron atomique périphérique se trouve dans l'état stationnaire $|i\rangle$ d'énergie E_i .

Q12. En l'absence de la perturbation $V(t)$, quelle est la probabilité que l'électron atomique puisse passer dans un état $|f\rangle$ d'énergie $E_f \neq E_i$?

Q13. En utilisant la formule des perturbations dépendant du temps, donner l'expression de la probabilité $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}$ de trouver l'électron atomique dans l'état stationnaire $|f\rangle$ **après** le passage de la particule (instant final : $t \rightarrow +\infty$), en faisant apparaître le temps caractéristique $\tau = b/v$ et les éléments de matrice $\langle f|X|i\rangle$ et $\langle f|Y|i\rangle$.

L'intégrale précédente étant de résolution malaisée, on se propose de réaliser quelques approximations, basées sur le fait que la particule à détecter possède une vitesse v élevée. On observe en effet que $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}$ est l'intégrale du produit d'une fonction oscillant à la pulsation ω_{if} par une fonction dont le module décroît avec $|t|$, avec une vitesse de décroissance dépendant de τ .

Q14. En admettant que $\langle f|X|i\rangle$ et $\langle f|Y|i\rangle$ sont **approximativement** du même ordre de grandeur, tracer l'allure de l'intégrand dans l'intégrale précédente (en partie réelle et imaginaire), pour $|\omega_{if}\tau| \ll 1$, puis $|\omega_{if}\tau| \gg 1$. Quelle est la signification physique du temps τ ?

Q15. En déduire la valeur de τ en deçà de laquelle $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}$ devient importante.

Q16. Quelle condition liant τ et ω_{if} doit être vérifiée pour que l'on puisse remplacer $e^{-i\omega_{if}t}$ par 1 dans l'expression de $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}$? En déduire $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}$ avec cette approximation. On donne l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u)^{3/2}} = 1$$

Q17. Vérifier la validité de l'approximation dans le cas d'une particule α (${}^4_2\text{He}$) d'énergie $E_c \approx 10 \text{ MeV}$, passant approximativement à 10 \AA d'un atome d'hydrogène.

3.1 Énergie moyenne cédée par la particule à l'atome

On voit que la probabilité de transition de $|i\rangle$ vers $|f\rangle$ dépend, non seulement des paramètres de l'interaction « atome-particule chargée », mais aussi du niveau d'énergie initial E_i et du niveau final E_f vers lequel l'électron atomique peut transiter. En l'occurrence, au moment de l'interaction, l'électron atomique est sur un niveau E_i quelconque (pas nécessairement le plus bas qui lui soit accessible), et a une certaine probabilité de transition vers chacun des autres.

Q18. En appliquant la conservation de l'énergie totale au système (atome+particule chargée) lors du processus d'interaction, déterminer l'énergie **moyenne** δE perdue par la particule incidente lors de son interaction avec un atome.

Afin de calculer cette expression, on se propose de démontrer la règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn, *i.e.*

$$\sum_f (E_f - E_i) |\langle f | X | i \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m_e}.$$

Ce résultat est valable, quelque soit l'état initial $|i\rangle$, dans l'approximation des électrons indépendants, *i.e.* lorsque l'hamiltonien de l'électron, $H = \frac{P^2}{2m} + V(X, Y, Z)$, ne dépend que de sa position (X, Y, Z) par rapport au noyau, et non de sa position par rapport aux autres électrons. C'est en bonne approximation le cas d'un électron périphérique.

Q19. Déterminer le commutateur $[X, H]$. En déduire $\langle f | P_x | i \rangle$ en fonction de $\langle f | X | i \rangle$.

Q20. Montrer que $\langle i | (XP_x - P_x X) | i \rangle = i\hbar$

Q21. En déduire la règle de somme, en développant le produit scalaire précédent, puis en insérant la relation de fermeture $\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}$ entre les opérateurs X et P_x .

Q22. En déduire δE . Si E est l'énergie cinétique de la particule à détecter, de quels paramètres dépend le produit $E \cdot \delta E$?

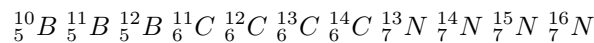
3.2 Utilisation expérimentale : principe du "E-dE counter telescope"

On s'intéresse ici à des particules incidentes de type « ions lourds », qui sont des noyaux d'atomes complètement ionisés, de numéro atomique Z , et dont la masse est en bonne approximation proportionnelle au nombre de masse A . Les nombreux passages de ces ions dans le matériau du détecteur impliquent une **moyenne** sur le paramètre d'impact b du résultat précédent, de sorte que $E \cdot \delta E = kZ^2 A$ en moyenne, k dépendant du matériau. Ce résultat est à la base de l'utilisation des détecteurs pour l'identification de noyaux produits dans des réaction nucléaires.

Les ions à identifier sont les produits finals d'une réaction induite par collision de noyaux d'azote accélérés à une énergie de 113 MeV , sur des noyaux cibles d'argent. Sur la figure 3, chaque petit point représente un événement, *i.e.* l'énergie E et la perte d'énergie δE d'un ion mesurées quand il traverse un détecteur au silicium. Le point de référence, plus épais, correspond à l'isotope $^{12}_6\text{C}$ du carbone, qui à une énergie $E = 50 \text{ MeV}$, subit une perte $\delta E = 30 \text{ MeV}$.

Q23. Calculer la constante k , et la perte théorique d'énergie des ions $^{12}_6\text{C}$ aux énergies de 60 et 70 MeV . Reporter les points correspondants sur la figure.

Q24. Sachant que la réaction pourrait produire les isotopes suivants



quels sont les noyaux effectivement produits? Justifiez votre réponse en portant les points correspondants sur la figure, en vous limitant à $E = 50 \text{ MeV}$ et $E = 70 \text{ MeV}$.

Références bibliographiques

- J.L. Basdevant, Problèmes de Mécanique Quantique, Ellipses.
- J. Lilley, Nuclear Physics (Principles and Applications), Wiley.
- A. Das & T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, Wiley.
- Documentation technique du détecteur embarqué LICA.

FIG. 3 – Données expérimentales relatives à la réaction $N + Ag \rightarrow ?$