

Imagerie par Résonance Magnétique

Introduction

La résonance magnétique nucléaire est une technique en développement depuis une cinquantaine d'années. Le phénomène physique a été conceptualisé par BLOCH et PURCELL en 1946¹. Cette technique a été depuis largement utilisée par les chimistes, puis les biologistes.

Les premiers développements en imagerie datent des années 1973. Les premières images chez l'homme ont été réalisées en 1979. Aujourd'hui, après 15 ans d'évolutions, l'IRM est devenue une technique majeure de l'imagerie médicale moderne. Potentiellement, elle est appelée encore à des développements importants.

Ce bureau d'étude s'appuie sur l'article suivant : « L'imagerie cérébrale : IRM et TEP », B. Mazoyer, Pour La Science, n° 302, Décembre 2002, pp 42-49. Cet article décrit pages 45 à 47, les principes physiques de l'IRM qu'on se propose de détailler dans ce B.E. tant du point de vue classique (partie 1) que du point de vue quantique (partie 2). La partie 3 est consacrée à la mise en œuvre expérimentale d'un dispositif de résonance magnétique nucléaire (R.M.N.), et à la technique d'obtention d'une image « I.R.M. ».

Partie 1 : Modèle classique

L'objectif de cette partie est d'étudier classiquement le mouvement d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ dans un champ magnétique. On ne s'intéressera qu'au degré de liberté lié au spin.

Une particule de moment magnétique de spin $\vec{\mu}(t)$, est soumise à un champ magnétique statique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{z}$ où \vec{z} est le vecteur unitaire de l'axe Oz du repère (Oxyz) du référentiel fixe du laboratoire \mathcal{R} (cf. figure 1). On note γ le rapport gyromagnétique de spin de cette particule.

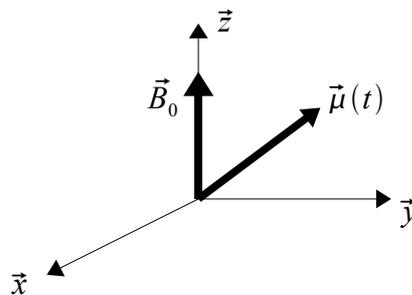


Figure 1.

1. Montrer que l'équation du mouvement du spin $\vec{\mu}(t)$ s'écrit :

$$\frac{d\vec{\mu}(t)}{dt} = \gamma \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 .$$

2. Résoudre cette équation en déterminant les expressions des composantes $\mu_x(t)$, $\mu_y(t)$ et $\mu_z(t)$ de $\vec{\mu}(t)$ en fonction des valeurs initiales $\mu_x(0)$, $\mu_y(0)$ et $\mu_z(0)$ de $\vec{\mu}(0)$. On introduira la pulsation propre $\omega_0 = \gamma B_0$. Décrire le mouvement de $\vec{\mu}(t)$ lorsque $\mu_z(0) = 0$.

¹ Ils ont obtenu le prix Nobel en 1952

3. Montrer qu'on peut mettre $\vec{\mu}(t)$ sous la forme :

$$\vec{\mu}(t) = R_z(\omega_0 t) \vec{\mu}(0) ,$$

où $R_z(\theta)$ est la matrice de rotation d'un angle θ autour de Oz :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On se place maintenant dans le référentiel $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$ tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ autour d'un axe orienté par $\vec{\Omega}$. On rappelle la relation suivante :

$$\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\mu} .$$

4. Montrer que dans le référentiel tournant $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} = \gamma \vec{\mu} \wedge \vec{B}_{eff} ,$$

où le champ magnétique effectif \vec{B}_{eff} s'exprime en fonction de \vec{B}_{eff} , $\vec{\Omega}$ et γ .

5. Montrer que pour une valeur particulière de $\vec{\Omega}$, $\vec{\mu}(t)$ est une constante dans le référentiel tournant $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$. Interpréter physiquement ce résultat.

On superpose au champ statique \vec{B}_0 , un champ radiofréquence (RF) \vec{B}_1 de pulsation ω perpendiculaire à \vec{B}_0 :

$$\vec{B}_1 = B_1 (\vec{x} \cos \omega t - \vec{y} \sin \omega t) \quad ^1 .$$

L'étude du mouvement de $\vec{\mu}(t)$ s'effectue dans le référentiel $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$ tournant autour de l'axe \vec{z} à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = -\omega \vec{z}$. On note $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z})$ les vecteurs unitaires tournants de $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$.

6. Montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} = \vec{\mu} \wedge (\delta \vec{z} + \omega_1 \vec{x}') ,$$

où δ et ω_1 s'expriment en fonction de ω , ω_0 , γ et B_1 .

On se place dans le cas particulier de la « résonance » où $\omega = \omega_0$.

7. Montrer qu'on peut mettre $(\vec{\mu}(t))_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}}$ sous la forme :

$$(\vec{\mu}(t))_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} = R_x(\omega_1 t) (\vec{\mu}(0))_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} .$$

Interpréter physiquement ce résultat.

8. On suppose que le champ RF n'est appliqué que pendant la durée d'une impulsion (pulse RF) de durée τ . On définit les durées $\tau = t_\pi$ et $\tau = t_{\pi/2}$ pour lesquels respectivement

$$R_x(\omega_1 t_\pi) = \pi \text{ et } R_x(\omega_1 t_{\pi/2}) = \pi/2 . \text{ A quelles orientations de } (\vec{\mu}(\tau))_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} \text{ correspondent}$$

¹ Il s'agit en fait du champ magnétique d'une onde plane progressive RF polarisée circulairement à gauche

ces situations ?

On se place maintenant dans le cas général ($\omega \neq \omega_0$) .

On pose :
$$\cos\theta = \frac{\omega_0 - \omega}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_{eff}} .$$

9. Montrer que le mouvement de $\vec{\mu}(t)$ dans $\mathfrak{R}_{\vec{\omega}}$ est une rotation à la vitesse angulaire ω_{eff} autour d'un axe orienté par le vecteur $\vec{B}_{eff} = \frac{1}{\gamma}(\delta\vec{z} + \omega_1\vec{x}')$ incliné d'un angle θ par rapport à \vec{z} (cf. figure 2).

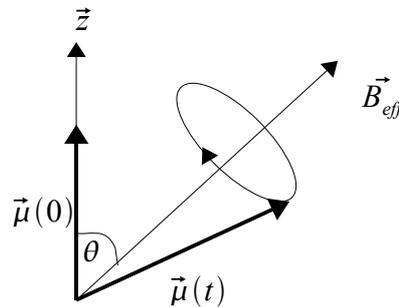


Figure 2.

Les résultats établis à la question 8 montrent que l'application d'un pulse RF résonant ($\omega = \omega_0$) permet de faire basculer l'orientation initiale du spin. Que se passe-t-il après le pulse ?

10. A partir de l'expression de l'énergie potentielle d'interaction, $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, montrer que l'état « basculé » n'est pas un état stable. Vers quelle orientation retourne naturellement $\vec{\mu}(t)$?

Ainsi, après l'application du pulse, se déroule une phase de relaxation durant laquelle $\vec{\mu}(t)$ rejoint son orientation d'équilibre.

Dans un volume macroscopique V, il faut évidemment intégrer les effets sur une quantité très importante de particules et on définit l'aimantation globale $\vec{M}(t)$:

$$\vec{M}(t) = \frac{1}{V} \sum_{particules \in V} \mu_i(t) .$$

Pour décrire le phénomène de retour à l'équilibre de $\vec{M}(t)$, on introduit phénoménologiquement deux constantes de temps, l'une, T_1 , pour caractériser la récupération de la partie longitudinale ($M_z(t)$) de $\vec{M}(t)$, et l'autre, T_2 , pour caractériser la disparition de la partie transverse $M_T = M_x(t)\vec{x} + M_y(t)\vec{y}$ de $\vec{M}(t)$.

Il semble *a priori* absurde de séparer conceptuellement ces deux évènements simultanés. Cependant, cette distinction est nécessaire : dans les tissus biologiques, en particulier, le moment magnétique ne garde pas un module constant lors de son retour à l'équilibre, de sorte que l'aimantation transversale disparaît plus vite que ne réapparaît l'aimantation longitudinale¹.

1 Par exemple pour la matière grise du cerveau : $T_1 = 900$ ms et $T_2 = 90$ ms; pour la graisse : $T_1 = 300$ ms et

La relaxation longitudinale, ou encore relaxation spin-réseau, correspond au retour à l'équilibre énergétique du système macroscopique après le pulse. La constante T_1 caractérise en quelque sorte un « freinage » et dépend en grande partie de la mobilité des particules dans son environnement (le réseau). L'équation qui régit le retour de $M(z)$ vers sa valeur à l'équilibre

M_0 dans le référentiel tournant $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$ est :

$$\left(\frac{dM_z(t)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} = \frac{1}{T_1} (M_0 - (M_z(t))_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}}) .$$

La relaxation transversale est en fait due à la désynchronisation des moments magnétiques élémentaires ($\mu_i(t)$) dans leur mouvement autour de \vec{B}_0 ¹, désynchronisation liée aux interactions entre les moments élémentaires, aux inhomogénéités spatiales du champ, et à d'autres causes qui agissent sur les valeurs des pulsations de résonance locales aux particules. L'équation qui gouverne la disparition de la composante $M_T = M_x(t)\vec{x} + M_y(t)\vec{y}$ de $\vec{M}(t)$ dans le référentiel tournant $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$ s'écrit :

$$\left(\frac{dM_T(t)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} = -\frac{1}{T_2} (M_T(t))_{\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}} .$$

11. Déterminer et représenter graphiquement les relaxations temporelles des aimantations transverse et longitudinale après un pulse RF de durée $t_{\pi/2}$ ans le référentiel tournant $\mathfrak{R}_{\vec{\Omega}}$.

Partie 2 : Modèle quantique

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement quantique des particules en utilisant la même démarche que dans la partie précédente, à savoir l'utilisation intensive du référentiel tournant.

En mécanique quantique les moments magnétiques de spin sont représentés par des vecteurs d'état dans un espace de Hilbert² de dimension 2. Pour alléger les notations, nous noterons les matrices de Pauli :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Nous noterons $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ les états propres de l'opérateur Z qui correspondent aux valeurs propres respectives $+1/2$ et $-1/2$.

Pour pouvoir raisonner géométriquement, nous introduisons un outil très pratique, la sphère de Bloch de la figure 3. Un point quelconque de cette surface permet de représenter un vecteur de la forme :

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + e^{-i\varphi} \sin(\theta/2)|\downarrow\rangle .$$

² $T_2 = 40$ ms; pour le liquide céphalo – rachidien : $T_1 = 2,5$ s et $T_2 = 2$ s, ...

1 Ce phénomène sera traité dans la partie suivante

2 Cf. photocopié pp 143-158

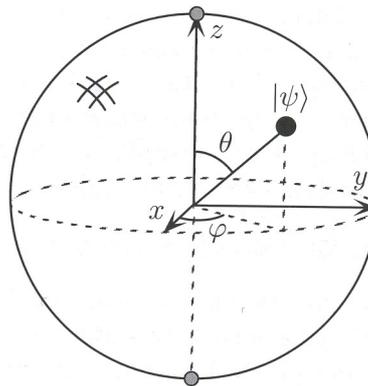


Figure 3. Sphère de Bloch¹

1. Déterminer les états propres et valeurs propres de l'opérateur S_z , composante selon \vec{z} de l'opérateur de spin \vec{S} , en fonctions de $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ et \hbar .
2. Représenter les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ sur la sphère de Bloch.

Prenons l'état correspondant à $\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$.

3. Quelles sont les résultats possibles d'une mesure de spin en projection sur l'axe \vec{z} ?
4. Donner les probabilités des mesure selon les résultats possibles.
5. Que deviennent les états de spin en projection sur l'axe \vec{z} selon le résultat de la mesure ?

Nous utiliserons par la suite l'opérateur :

$$R_n(\alpha) = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \text{ où } \vec{\sigma} = \frac{1}{\hbar}\vec{S} \text{ et } \vec{n} \text{ un vecteur unitaire.}$$

On remarquera que $\vec{x}\cdot\vec{\sigma} = \sigma_x = X$, $\vec{y}\cdot\vec{\sigma} = \sigma_y = Y$, et $\vec{z}\cdot\vec{\sigma} = \sigma_z = Z$.

On admettra le résultat suivant² :

$$R_n(\alpha) = \cos(\alpha/2)I - i \cdot \sin(\alpha/2)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}.$$

6. Déterminer l'expression matricielle de l'opérateur $R_y(\pi)$
7. Montrer que $R_y(\pi)|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ puis calculer $R_y(\pi/2)|\uparrow\rangle$. Visualiser graphiquement ces deux résultats dans la sphère de Bloch.
8. Montrer de façon générale, que l'action de l'opérateur $R_n(\alpha)$ sur un vecteur d'état unitaire correspond à une rotation de ce vecteur d'état d'un angle α autour de l'axe \vec{n} sur la sphère de Bloch.

Dans la suite, on cherche à modéliser le comportement quantique d'une particule de spin $1/2$ dans un champ magnétique. On commence comme pour l'étude classique par s'intéresser au cas d'un champ statique $\vec{B} = B_0\vec{z}$.

¹ Adapté de « Quantum Computation and Quantum Information », Nielsen and Chuang, Cambridge University Press (2000)

² Cf annexe « complément » pour la démonstration

9. Déterminer l'expression de l'hamiltonien d'interaction H_0 en fonction de ω_0 et de l'opérateur Z .

On note $|\phi(t)\rangle$ un vecteur d'état dans la base « fixe » $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, initialement dans l'état $|\phi(0)\rangle$. Comme pour l'étude classique, on étudie l'état du système dans un référentiel tournant à une vitesse angulaire $\omega_0 \vec{z}$ en définissant un état « tournant » :

$$|\tilde{\phi}(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}Z} |\phi(t)\rangle .$$

On admettra que l'équation de Schrodinger vérifiée par $|\phi(t)\rangle$ peut s'écrire sous la forme :

$$|\phi(t)\rangle = e^{-iH_0 t} |\phi(0)\rangle .$$

L'opérateur $e^{-iH_0 t}$ est appelé opérateur d'évolution.

10. Montrer que $|\tilde{\phi}(t)\rangle = |\phi(0)\rangle$. Interprétez physiquement ce résultat.

On admettra la formule suivante :

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \cdot e^{\frac{1}{2}[A, B]} .$$

On superpose au champ statique \vec{B}_0 , un champ radiofréquence (RF) \vec{B}_1 de pulsation ω perpendiculaire à \vec{B}_0 :

$$\vec{B}_1 = B_1 (\vec{x} \cos \omega t - \vec{y} \sin \omega t) .$$

On mènera l'étude dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire $\omega \vec{z}$ en définissant :

$$|\tilde{\phi}(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}Z} |\phi(t)\rangle .$$

11. Montrer que l'Hamiltonien d'interaction peut s'écrire sous la forme¹ :

$$H(t) = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} = H_0 - \frac{1}{2} \hbar \omega_1 (\eta e^{i\omega t} + \eta^\dagger e^{-i\omega t}) ,$$

avec $\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (X + iY)/2$, $\omega_0 = \gamma B_0$ et $\omega_1 = \gamma B_1$.

On cherche maintenant à calculer l'hamiltonien \tilde{H} du système dans le référentiel tournant qui intervient donc dans l'équation de Schrodinger :

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\phi}(t)\rangle = \tilde{H} |\tilde{\phi}(t)\rangle .$$

Le calcul qui mène à \tilde{H} est long et fastidieux. Il utilise les propriétés des matrices de Pauli (cf. annexe « compléments ») et les formules suivantes que l'on pourra admettre :

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-i\frac{\omega t}{2}Z} \cdot \eta \cdot e^{i\frac{\omega t}{2}Z} \right) = -i\omega \left(e^{-i\frac{\omega t}{2}Z} \cdot \eta \cdot e^{i\frac{\omega t}{2}Z} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-i\frac{\omega t}{2}Z} \cdot \eta^\dagger \cdot e^{i\frac{\omega t}{2}Z} \right) = -i\omega \left(e^{-i\frac{\omega t}{2}Z} \cdot \eta^\dagger \cdot e^{i\frac{\omega t}{2}Z} \right) .$$

On pourra cependant admettre le résultat de la question suivante pour continuer le B.E.

¹ Cette forme un peu exotique nous permettra par la suite d'alléger les calculs

12. Montrer que $\tilde{H} = \frac{1}{2} \hbar \delta Z - \frac{1}{2} \hbar \omega_1 X$ où $\delta = \omega_0 - \omega$. Interpréter le fait que \tilde{H} est indépendant du temps dans le référentiel tournant.
13. Dans le cas de la résonance ($\omega = \omega_0$) montrer que l'opérateur d'évolution qui lie $|\tilde{\phi}(t)\rangle$ et $|\phi(0)\rangle$ est un opérateur de rotation dont on calculera l'axe et l'angle (dépendant du temps).
14. Supposons qu'initialement $|\phi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Déterminer les durées t_π et $t_{\pi/2}$ de pulses RF permettant de faire basculer le spin respectivement transversalement et longitudinalement ? Comparer ce résultat au cas classique.

On se propose d'étudier une technique, *l'écho de spin*, couramment utilisée en IRM, qui permet de compenser la dispersion des fréquences de résonance due notamment aux inhomogénéités du champ statique \vec{B}_0 ¹.

Partons d'un état initial $|\phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ et étudions l'évolution de cet état, dans le référentiel fixe et à la résonance ($\omega = \omega_0$).

15. Représenter graphiquement $|\phi(0)\rangle$ sur la sphère de Bloch.
16. Calculer la valeur moyenne du moment magnétique de spin, $\langle \vec{\mu}(0) \rangle = (\langle \mu_x(0) \rangle, \langle \mu_y(0) \rangle, \langle \mu_z(0) \rangle)$, lorsque le système est dans l'état $|\phi(0)\rangle$. Représenter graphiquement $\langle \vec{\mu}(0) \rangle$.
17. Déterminer l'état $|\phi(\tau)\rangle$ du système dans la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ après une évolution libre (sans champ RF) d'une durée τ .
18. Calculer la valeur moyenne du moment magnétique de spin, $\langle \vec{\mu}(\tau) \rangle$ lorsque le système est dans l'état $|\phi(\tau)\rangle$. Représenter graphiquement $\langle \vec{\mu}(\tau) \rangle$.
19. On applique ensuite un pulse RF de durée $t_\pi \ll \tau$ suivant l'axe Oy en admettant² que cette opération est simplement décrite par l'opérateur de rotation $R_y(\pi)$ ³. Déterminer l'état $|\phi(\tau + t_\pi)\rangle$ du système après l'application de ce pulse.
20. Calculer la valeur moyenne du moment magnétique de spin, $\langle \vec{\mu}(\tau + t_\pi) \rangle$ lorsque le système est dans l'état $|\phi(\tau + t_\pi)\rangle$. Représenter graphiquement $\langle \vec{\mu}(\tau + t_\pi) \rangle$. Quelle transformation permet de passer de $\langle \vec{\mu}(\tau) \rangle$ à $\langle \vec{\mu}(\tau + t_\pi) \rangle$?
21. Déterminer l'état $|\phi(2\tau + t_\pi)\rangle$ après une seconde évolution libre d'une durée τ .
22. Calculer la valeur moyenne du moment magnétique de spin, $\langle \vec{\mu}(2\tau + t_\pi) \rangle$, lorsque le système est dans l'état $|\phi(2\tau + t_\pi)\rangle$. Représenter graphiquement $\langle \vec{\mu}(2\tau + t_\pi) \rangle$. Conclusion ?

Supposons maintenant un système composé de deux spins de fréquences de résonance légèrement différentes ω_0 et $\omega_0 + \Delta$, de moments magnétiques initialement identiques, portés par \vec{y} . On fait subir à ces deux spins : une évolution libre⁴ de durée τ suivie d'un pulse RF de durée $t_\pi \ll \tau$ suivant l'axe Oy puis d'une seconde évolution libre de durée τ .

1 Voir fin de la partie précédente

2 Cela se démontre aisément à l'aide des résultats précédents

3 On supposera que sur cette durée t_π l'état ne subit pas l'effet du champ statique \vec{B}_0 .

4 En supposant que les deux spins n'interagissent pas

23. En raisonnant graphiquement *dans le référentiel fixe* montrer que pour un certaine valeur du temps τ le moment magnétique du système est nul après la première évolution libre.
24. Que dire du moment magnétique du système à l'issue du pulse et de la seconde évolution libre ?
25. Pour un système de spins de fréquences de résonance différentes mais proches de ω_0 , comment peut-on qualifier le comportement collectif des moments magnétiques avant l'application du pulse, puis après la seconde évolution libre ?

Cette technique appelée « écho de spin » est couramment utilisée en IRM moderne pour s'opposer à la désynchronisation des moments de spin et avoir accès à la « vraie » dynamique de relaxation transverse. L'application d'un premier pulse RF de durée $t_{\pi/2}$ permet de faire basculer les spins dans le plan transverse. L'application de plusieurs pluses RF de durée t_{π} permet de resynchroniser¹ périodiquement les spins pour récupérer la « vraie » relaxation (cf. figure 4).

26. Expliquer la présence des « échos de spin » aux temps 2τ , 4τ , 6τ , ..., de la courbe de démagnétisation transverse représentée sur la figure 4.
27. Expliquer pourquoi cette technique permet de mesurer le temps de relaxation transverse T_2 .

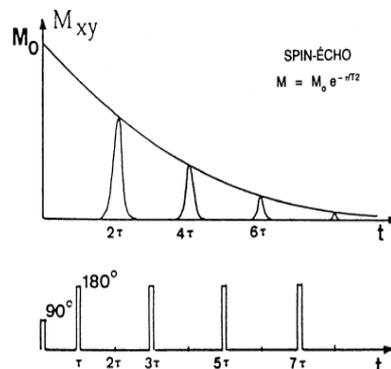


Figure 4. Mesure de T_2 par la technique de l'écho de spin²

Partie 3 : Imagerie

Dans cette partie, on s'intéresse à la technique de construction d'une image de Résonance Magnétique Nucléaire³.

Un schéma de principe d'un dispositif de Résonance Magnétique Nucléaire est représenté sur la figure 5. Un aimant permanent (représenté de façon simplifiée sous la forme d'un solénoïde) permet de générer le champ magnétostatique \vec{B}_0 est un solénoïde crée un champ RF \vec{B}_1 perpendiculaire à \vec{B}_0 . Le signal F.I.D. (Free Induction Decay) est détecté par ce même solénoïde.

¹ On emploie parfois le terme de « refocalisation »

² Source : Cours d'I.R.M., J.F. Le Bas – CHU Grenoble

³ On remarquera que le N de Nucléaire a disparu dans l'acronyme I.R.M., histoire de ne pas effrayer le grand public...

Dans un premier temps nous allons essayer de comprendre pourquoi il est délicat de mesurer l'aimantation nette due à la simple application du champ \vec{B}_0 , comme il est dit dans l'article page 46 : « ...la somme des moments magnétiques élémentaires est parallèle au champ magnétique B_0 , mais sa valeur est très faible ... impossible à distinguer ».

1. Montrer que le diagramme d'énergie de l'interaction entre les spins et le champ $B_0 \vec{z}$ fait apparaître deux niveaux d'énergie E_0 et $E_1 > E_0$ distants d'une valeur $\hbar \omega_0$.
2. A quelles orientations du moment magnétique $\vec{\mu}$ correspondent ces deux niveaux d'énergie.

On considère maintenant une population de spins et on suppose que la distribution des spins sur ces deux niveaux obéit à la loi de Boltzmann : $N_{0,1} \propto e^{E_{0,1}/kT}$, où $N_{1,2}$ est le nombre (ou la densité volumique) de spins sur les niveaux $E_{0,1}$.

3. Montrer qu'à température ambiante, les populations sur les niveaux $E_{1,2}$ sont quasiment identiques.
4. En notant $N \approx 2N_{0,1}$, déterminer l'expression, au premier ordre en N , de la différence de population $N_1 - N_0$.
5. En déduire l'expression approchée de l'aimantation totale M_z selon l'axe \vec{z} .
Application numérique : calculer M_z pour $B_0 = 1 T$, $T = 398 K$, et $N \approx 10^{23}$.
Conclure.

On s'intéresse maintenant au signal F.I.D. expérimentalement obtenu.

6. L'origine du signal F.I.D. relève d'une loi très connue de électromagnétisme classique. Laquelle ? Expliquer qualitativement l'allure du signal F.I.D.
7. Expliquer comment ce dispositif permet de déterminer expérimentalement la valeur des pulsations de résonance ω_0 de l'échantillon sous test dans le tube ?

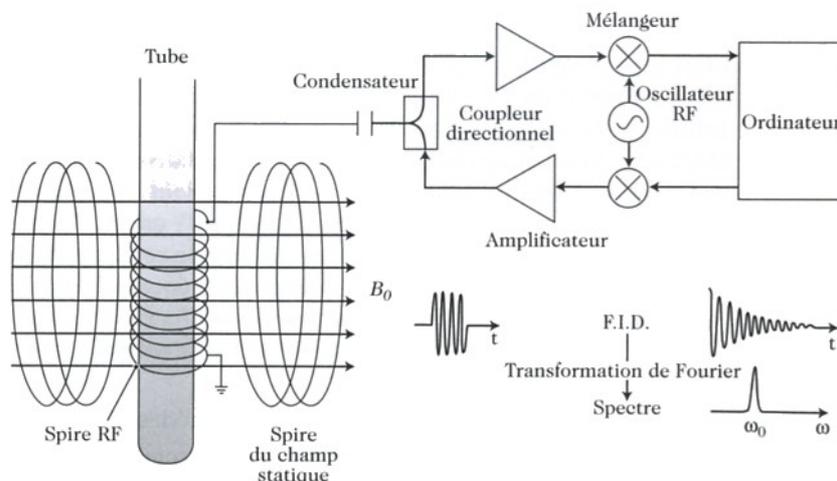


Figure 5. Schéma de principe d'une RMN.¹

¹ Adapté de « Quantum Computation and Quantum Information », Nielsen and Chuang, Cambridge University Press (2000)

Le principe d'obtention d'une image est décrit en haut de la page 47 de l'article : « A la place d'un champ B_0 uniforme, on applique un champ qui croit dans les trois directions de l'espace... ».

Analysons l'effet d'un champ magnétostatique dirigé selon \vec{z} et dont l'amplitude varie linéairement selon la direction x : $B(x) = B_0 + G_x \cdot x$.

On suppose que la portion de signal F.I.D., $ds(x, t)$, issu d'une tranche entre x et $x+dx$ peut se mettre en notation complexe sous la forme :

$$ds(x, t) = e(t) \cdot e^{-j\omega_0(x)t} \rho(x) dx \quad ,$$

où $\rho(x)$ est la distribution (ou densité) linéaire de spin au point x et $e(t)$ une fonction d'enveloppe (par exemple e^{-t/T_2} dans le cas d'une relaxation transverse) et $\omega_0(x) = \gamma B(x)$. On

pose $k_x = \frac{\gamma}{2\pi} G_x t$.

8. Montrer que le signal F.I.D. peut se mettre sous la forme : $s(t) = e^{-j\omega_0 t} e(t) f(k_x)$. Quelle transformation classique lie $f(k_x)$ et $\rho(x)$?
9. En déduire que le relevé expérimental de $f(k_x)$ permet d'en déduire une image *analogique* de la distribution des spins le long de l'axe Ox .

Le signal $f(k_x)$ est relevé¹ puis numérisé pour obtenir une séquence $s[n]$ de 256 échantillons. La période d'échantillonnage de $f(k_x)$ est $\Delta k = 3,9 \text{ m}^{-1}$.

10. Par quel traitement numérique peut-on, à partir de $s[n]$, obtenir une image *numérique* $I[k]$ de 256 échantillons de la distribution des spins le long de l'axe Ox . Ecrire les relations de passage de $s[n]$ à $I[k]$ et inversement.
11. On donne : $G_x = 10^{-2} \text{ T/m}$ et $\gamma = 42.10^6 \text{ Hz/T}$. Déterminer la dimension L et la résolution Δx de cette image.
12. A partir de l'analyse précédente à une dimension, montrer que l'application d'un gradient dans les trois directions de l'espace permet la reconstitution d'une image de la distribution $\rho(x, y, z)$.
13. Evaluer approximativement le temps mis pour réaliser une image 3D de $256 \times 256 \times 256$ points. On supposera les gradients identiques dans les trois dimensions $G_x = G_y = G_z$, de même que les périodes d'échantillonnage $\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z$ de $f(k_x, k_y, k_z)$.
14. Répertorier les principales causes qui peuvent dégrader l'image obtenue par cette technique d'I.R.M.

Pour en savoir plus sur les protocoles et traitements de l'I.R.M., on pourra consulter « Principle of Magnetic Resonance Imaging – A Signal Processing Perspective », Z.-P. Liang, P.C. Lauterbur, IEEE Press (2000) ou « Magnetic Resonance Imaging, Physical Principles and Sequence Design », E.M. Haacke, R.W. Brown, M.R. Thomson, R. Venkatesan, Wiley (1999).

Conclusion

Synthétiser vos résultats et conclure quant aux avantages et inconvénients de l'IRM par rapport notamment à la radiographie par rayon X.

¹ $f(k_x)$ peut être extraite à partir d'une démodulation synchrone à la pulsation ω_0 et en supposant que l'enveloppe $e(t)$ varie très lentement devant $f(k_x)$.

Annexe : Compléments

Fonctions d'opérateur

- Pour calculer une fonction d'opérateur, on utilise le théorème de décomposition spectrale d'un opérateur normal A (i.e. diagonalisable) qui permet d'écrire :

$$A = \sum_a a |a\rangle\langle a| ,$$

où $\{a\}$ est le spectre des valeurs propres de A et $|a\rangle\langle a|$ correspond le projecteur sur le sous-espace propre associé à a).

- La fonction d'opérateur $f(A)$ s'exprime alors de la façon suivante :

$$f(A) = \sum_a f(a) |a\rangle\langle a| .$$

- Pour deux opérateur A et B , on admettra la formule suivante :

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \cdot e^{\frac{1}{2}[A, B]} .$$

Quelques résultats utiles sur les matrices de Pauli

- $[X, Y] = 2iZ$ $[Y, Z] = 2iX$ $[Z, X] = 2iY$
- $X.Y = iZ$ $Y.Z = iX$ $Z.X = iY$ et $Y.X = -iZ$ $Z.Y = -iX$ $X.Z = -iY$

Quelques démonstrations :

- $R_n(\alpha) = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(\alpha/2)I - i\sin(\alpha/2)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ où $\vec{\sigma} = \frac{1}{\hbar}\vec{S}$ et \vec{n} un vecteur unitaire.

On sait que toute fonction de classe C^∞ admet un développement en série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} .$$

On admet alors sans difficulté la formule sur les opérateurs :

$$f(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!} .$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$R_n(\alpha) = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{i\alpha}{2}\right)^n \frac{(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n}{n!} .$$

On remarquera que $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ est un opérateur unitaire car les matrices de Pauli sont unitaires et le vecteur \vec{n} aussi. Il s'ensuit $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = I$ puis $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{(2p)} = I$ et $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{(2p+1)} = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$. Compte_tenu que $i^{(2p)} = -1$ et $i^{(2p+1)} = -i$, la somme se scinde en deux :

$$R_n(\alpha) = \left[\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2p} \right] \cdot I - i \left[\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2p+1} \right] \cdot (\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) .$$

On reconnaît aisément les développements en série de Taylor de $\cos(\alpha/2)$ et $\sin(\alpha/2)$.