

Interférométrie de neutrons

Introduction

L'interféromètre à neutrons constitue un outil remarquable pour mettre en évidence les phénomènes physiques qui agissent sur la phase de la fonction d'onde d'une particule quantique (le neutron).

Dans ce bureau d'étude, nous proposons d'étudier l'action du champ gravitationnel et d'un champ magnétique sur des neutrons, à travers trois articles de la revue Physical Review Letters (P.R.L.) :

L'article 1 : « Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference » (P.R.L. 33, 20 (1974)) se propose de montrer la faisabilité d'une expérience d'interférométrie de neutrons.

L'article 2 : « Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference » (P.R.L. 34, 23 (1975)) décrit la réalisation pratique de l'interféromètre et la mesure accreditant les prévisions de l'article précédent.

L'article 3 : « Observation of the Phase Shift of a Neutron Due to Precession in a Magnetic Field » (P.R.L. 35, 16 (1975)) vient clore une controverse datant des années 1930 en rapportant la mesure d'un changement de signe de la fonction d'onde du neutron lors de la rotation de 2π de son spin.

Quelques mots-cles : interférométrie, dualité onde-corpuscule, potentiel gravitationnel, spin, précession de Larmor.

Les résultats de la partie III sont fondamentaux, en particulier celui de la question 5. On pourra cependant admettre les résultats énoncés dans les articles pour traiter quasiment l'ensemble du bureau d'étude. Les parties I, II, IV et V sont indépendantes.

Partie I : Compréhension des articles

La lecture des 3 articles doit vous permettre de vous immerger dans le sujet. Il ne s'agit pas de chercher à tout comprendre tout de suite mais d'appréhender les phénomènes physiques mis en jeu.

Il est recommandé de lire les articles dans l'ordre « chronologique ».

Intéressez-vous sur les points suivants :

1. A la lueur des articles 1 et 2, pouvez-vous dégager les enjeux de l'interférométrie de neutrons pour la physique quantique ?
2. Que pensez-vous de la date de telles expériences ?
3. Que vous inspire l'association hétéroclite des auteurs des articles 2 et 3 ?
4. Que cherche-t-on à mettre en évidence avec les expériences de l'article 3 ?

Partie II : Dualité onde – corpuscule

Dans cette partie, on s'intéresse aux propriétés des neutrons et des rayons X utilisés dans l'expérience de l'article 2.

1. Qu'est-ce qu'un neutron ? Comment en fabrique-t-on ? Quelle est la valeur de leur masse ? A quelle équation obéit la « fonction d'onde » de cette particule ?
2. Reprendre la question précédente pour les rayons X.
3. Quelles sont les valeurs des longueurs d'onde des neutrons et rayons X utilisées dans l'expérience de l'article 2 ?
4. Déterminer la vitesse et l'énergie cinétique des neutrons.
5. Reprendre la question précédente pour les rayons X.
6. En prenant $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, calculer l'énergie potentielle gravitationnelle des neutrons à une hauteur de 1 m au dessus du sol, en supposant que cette énergie est nulle au niveau du sol.
7. Déterminer l'expression de l'énergie totale E des neutrons à une hauteur r au dessus du sol. On exprimera E en fonction de r , M masse des neutrons, p impulsion des neutrons, et g constante de gravitation.
8. Quelle propriété vérifie E si toutes les collisions subies par les neutrons sont élastiques ?

Partie III : Interférométrie

Cette partie consiste à modéliser l'interféromètre de la figure 1 de l'article 2, ce qui doit nous amener à l'établissement des formules 4a et 4b du même article.

L'onde incidente du dispositif de la figure 1 est supposée plane :

$$\psi_{inc} = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar},$$

où E est l'énergie des particules et \mathbf{p} leur impulsion. On suppose donc que le faisceau de neutron est « monocinétique » (neutrons thermiques) et que le faisceau de rayon X est monochromatique.

Les amplitudes des ondes transmises et diffusées¹ (ou diffractées) sont notées respectivement

$$\psi_T = t \cdot e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar} \quad \text{et} \quad \psi_D = d \cdot e^{i(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar},$$

où t et d sont respectivement les coefficients de transmission et de diffraction en amplitude à travers la lame.

On note : $T = |t|^2$ et $D = |d|^2$ les coefficients de transmission et de diffraction en intensité.

1. En supposant que la diffusion des particules est élastique, établir une relation entre $|\mathbf{p}|$ et $|\mathbf{p}'|$.

¹ On ne détaillera pas dans ce B.E. le principe de la diffusion de Bragg (ce qui sera fait en 2nd année)

Dans un premier temps, on suppose l'interféromètre parfaitement horizontal. Dans ce cas la différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre est nulle.

On suppose l'intensité du faisceau incident égale à 1 : $|\psi_{inc}|^2 = 1$.

2. Etablir l'expression de l'amplitude ψ_{ABD} de l'onde arrivant en D par le chemin ABD en fonction de t et d .
3. Etablir l'expression de l'amplitude ψ_{ACD} de l'onde arrivant en D par le chemin ACD en fonction de t et d .
4. En déduire les expressions des amplitudes ψ_{C2} et ψ_{C3} puis des intensités I_{C2} et I_{C3} des ondes arrivant sur les détecteurs C_2 et C_3 en fonction de T et D .

On provoque un déphasage β de l'onde se propageant sur le trajet AC.

5. Calculer les nouvelles amplitudes et intensités ψ_{C2} , ψ_{C3} , I_{C2} et I_{C3} en fonction de T et D .
6. Comparer aux formules 4a et 4b de l'article 1. En déduire les valeurs numériques de R et D .
7. Calculer $I_{C2} + I_{C3}$. Commenter ce résultat.

On suppose que β peut s'écrire sous la forme : $\beta = q \cdot \sin \phi$ selon la formule (1) de l'article 2.

8. Représenter graphiquement $I_{C2} - I_{C3}$ en fonction de ϕ .
9. A partir du résultat expérimental présenté sur la figure 2 de l'article 2, calculer la valeur numérique de q . On pourra s'aider d'un calque et de papier millimétré.
10. Quelle méthode est utilisée pour mesurer q expérimentalement ?
11. A quoi peut-on attribuer les différences entre les résultats théoriques et expérimentaux ?
12. On insère une lame $\lambda/4$ dans un des bras de l'interféromètre. Que devient l'expression de $I_{C2} - I_{C3}$? Qu'observe-t-on expérimentalement et en quoi cette expérience permet de conclure sur le signe de q .
13. Comment interprétez-vous le résultat expérimental présenté sur la figure 4. Quel rôle jouent les rayons X dans les expériences d'interférométrie de neutrons ?
14. Avec quelle précision doivent être taillées les lames cristallines¹ ?
15. Indiquer d'autres sources d'erreurs de mesure.

¹ En réalité l'interféromètre est taillé dans un seul bloc de monocristal de silicium de 10 cm de long dans lequel il n'y a aucune dislocation ni aucun défaut de structure atomique

Partie IV : Interférences « gravitationnelles »

L'objectif de cette partie est dans un premier temps de valider les formules (1) et (2) de l'article 2 puis d'en déduire la valeur de la constante de gravitation (à l'aide notamment du résultat de la question 9 de la partie précédente).

Dans toute cette partie, on négligera l'épaisseur a des lames cristallines.

On fait tourner l'interféromètre autour de l'axe d'incidence du faisceau de neutrons, ce qui entraîne une différence de hauteur entre les segments BD et AC.

On note $k_{AB,CD}$ et $p_{AB,CD}$ respectivement les constantes de propagation et impulsions des neutrons le long des segments AB et CD.

On note L la longueur du segment BD, ϕ l'angle entre le plan horizontal contenant le segment AB et le plan incliné contenant le losange ABCD, et H la distance du point C au segment AB.

1. En considérant le losange ABCD, montrer que $L=d/\cos\theta$ et $H=2d\sin\theta$.
2. Quelle relation existe-t-il entre $k_{AB,CD}$ et $p_{AB,CD}$?
3. Montrer que $\Delta p = p_{AB} - p_{CD} \ll p_{AB}, p_{CD}$. En déduire $\Delta k = k_{AB} - k_{CD} \ll k_{AB}, k_{CD}$.
4. En s'aidant du résultat précédent et de celui de la question 8, établir l'expression de Δk en fonction de $M, g, h, \sin\phi$.
5. En déduire la différence de marche δ entre les trajets AB et CD.
6. Que dire de la différence de marche entre les trajets AC et BD ?
7. En déduire l'expression de β en fonction de λ , longueur d'onde des neutrons, $M, g, h, d, \tan\theta$ et $\sin\phi$.
8. Comparer avec les résultats des formules (1) et (2) de l'article 2.
9. A partir des données numériques de l'article et du résultat de la question 9 de la partie III, déterminer la valeur numérique de g . Conclure.

Partie V : Interférence « magnétiques » - Rotation de spin

L'objectif de cette partie est de modéliser l'interaction entre un champ magnétique et le spin des neutrons de sorte à valider la formule (2) de l'article 3 puis d'exploiter les résultats expérimentaux du même article pour vérifier l'étonnante prédiction théorique suivante : le vecteur d'état d'un spin $\frac{1}{2}$ change de signe lors de sa rotation d'un multiple impair de 2π autour d'un axe.

Avant d'aborder les questions qui suivent, il est fortement conseillé de (re)lire le chapitre 9 du polycopié (p147-169) traitant du spin.

On suppose que le dispositif expérimental décrit sur la figure 1 de l'article 3 est en position horizontale. On considère le repère cartésien (Oxyz) où O est le milieu du segment AC et Oz dans la

direction du champ magnétique \mathbf{B} (Oy est donc dans le prolongement de AC et Ox perpendiculaire au plan de l'interféromètre).

Le neutron est un fermion de spin 1/2. On note \mathbf{S} son observable de spin, S_x , S_y , et S_z les observables du spin sur les 3 axes Ox, Oy et Oz et $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \boldsymbol{\sigma}$ son observable moment magnétique où les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sont les matrices de Pauli.

On note μ_N le magnéton de Bohr et g_N le facteur gyromagnétique du neutron.

On suppose que les neutrons du faisceau incidents sont préparés dans l'état de spin :

$$|+x\rangle = (1/\sqrt{2})(|+z\rangle + |-z\rangle) ,$$

où $|+z\rangle$ et $|-z\rangle$ sont les vecteurs propres de l'opérateur S_z associés respectivement aux valeurs propres $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$.

On suppose que le passage par une lame cristalline ne change pas l'état de spin.

1. Rappeler l'expression des matrices de Pauli et écrire matriciellement $|+x\rangle$, S_z , S_x et S_y dans la base $(|+z\rangle, |-z\rangle)$.
2. Quels sont les valeurs possibles des mesures de S_y ?
3. Quel est la probabilité de trouver $\mu_z = +\mu_0$ lors d'une mesure du moment magnétique de spin selon l'axe Oz.
4. Quel est l'état du système après une telle mesure ?
5. Si l'on cherche par la suite à mesurer le moment magnétique de spin selon l'axe Ox, quels seront les résultats des mesures et avec quelles probabilités ?
6. Conclure quant à une mesure simultanée du moment magnétique de spin selon Oz et Ox. Comment se traduit le résultat précédent sur le commutateur $[S_x, S_z]$?
7. Etablir la formule (1) de l'article 3 donnant l'expression de l'Hamiltonien d'un neutron lorsque seul son spin interagit avec le champ magnétique \mathbf{B} .
8. Déterminer l'évolution de l'état du spin $|+\epsilon(t)\rangle$ en fonction du temps.
9. Calculer les 3 composantes de la valeur moyenne du moment magnétique $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ lorsque le système est dans l'état $|+\epsilon(t)\rangle$.
10. Décrire le mouvement de $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ dans l'aimant en fonction du temps. On pourra poser $\omega = -2\mu_0 B/\hbar$.
11. A la sortie de l'aimant, quelle est la probabilité $P_x(+\mu_0)$ de trouver $\mu_x = +\mu_0$ en mesurant la composante du moment magnétique selon l'axe x ? On pourra poser $T = Ml\lambda/(2\pi\hbar)$ et on exprimera le résultat en fonction de $\beta = \omega T/2$.

12. Pour quelles valeurs $\beta_n = n\beta_1$ cette probabilité est-elle égale à 1 ?
13. Ces valeurs β_n correspondent à des valeurs du champ magnétique $b_n = nb_1$? Calculer la valeur numérique de b_1 .
14. A quel mouvement de $\langle \mu \rangle$ correspondent ces valeurs β ?
15. Montrer qu'en négligeant la phase résiduelle δ des formules (3) et (4), on retrouve les résultats établis dans la partie III.
16. A partir du résultat expérimental présenté sur la figure 3, déterminer approximativement l'écart ΔB entre deux maxima.
17. Dans quel état de spin se trouvent à coup sûr les neutrons lorsque $I_2 - I_3$ est maximal ? Dans quel état se trouvent-ils à coup sûr lorsque $I_2 - I_3$ est minimal ?
18. En comparant les valeurs b_n de la question 8 et la valeur ΔB de la question 11, et en rappelant le résultat d'une mesure de μ_x pour ces valeurs, expliquer pourquoi l'expérience démontre que le vecteur d'état d'un spin 1/2 change de signe lors d'une rotation d'un multiple impair de 2π autour d'un axe. Ce résultat est-il surprenant ?

Conclusion – Synthèse

Résumer l'ensemble de vos résultats et donner en quelques lignes vos conclusions sur l'interférométrie de neutrons.

Pour en savoir plus et approfondir le sujet :

- « Le rôle de la gravitation en mécanique quantique », D. Greenberger, A. Overhauser, Pour La Science, juillet 1980, p48-61
- « Quantum measurement in time dependent neutron interferometry », H. Rauch, Annales de l'I.H.P., section A, tome 49, n°3 (1988), p355-36
<http://www.nudam.org/item?idAIPHA_1988__49_3_355_0>