Les quantum dots

B.E. Physique Quantique 1A

ENSEA

On sait réaliser depuis quelques années des "boîtes quantiques" (*quantum dots* en anglais), de dimensions nanométriques, qui confinent les électrons de conduction d'un solide à basse température. La possibilité de contrôler les niveaux d'énergie d'un tel dispositif ouvre des perspectives très riches en micro- et en opto-électronique, notamment pour le stockage de l'information quantique (cf. article "mémoires de spin...").

Une boîte quantique est constituée d'un matériau A jouant le rôle de puits de potentiel, autour duquel on dépose un matériau B, qui forme une barrière de potentiel autour de A. Un ensemble de boîtes quantiques est présenté sur la figure 1 de l'article "Des atomes artificiles en couplage fort avec le réseau", qui montre des plots d'Arseniure d'Indium (InAs, matériau A) déposés sur un substrat d'Arseniure de Galium (GaAs, matériau B).

Nous nous intéressons dans ce sujet au mouvement d'un électron dans une boîte *bidimensionnelle*. On note $-q$ la charge de l'électron (i.e. $q > 0$), et on néglige tout effet associé au spin. On admettra que, dans un solide cristallin, la dynamique d'un électron est décrite par l'équation de Schrödinger usuelle, où toutefois la masse de l'électron est remplacée par une masse effective m^* dépendant du matériau. En coordonnées cartésiennes (x, y), l'ensemble des atomes des matériaux A et B crée un potentiel effectif $V(x, y)$ qui varie lentement à l'échelle atomique.

1 Rappel : l'oscillateur harmonique uni-dimensionnel

Une particule de masse m^* est soumise au potentiel harmonique $V(x) = m^*\omega^2x^2/2$.

Q1. Rappeler l'expression des états d'énergie E_n de l'oscillateur harmonique.

On rappelle l'expression des deux premières fonctions d'onde *orthonormées* de l'oscillateur harmonique :

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$
$$\varphi_1(x) = \left(\frac{4m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} x \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

Q2. Quelle est l'extension caractéristique l_0 (au sens d'une loi gaussienne) de la distribution de probabilité de présence d'un électron se trouvant dans l'état fondamental $\varphi_0(x)$?

La masse effective m^* de l'électron dans la boîte quantique est $m^* = 0,07m_0$, où m_0 est la masse de l'électron libre. On suppose la pulsation propre de l'oscillateur harmonique telle que $\hbar\omega = 0,060\ eV$.

Q3. Evalue numériquement l_0.

Q4. A l'aide du facteur de Boltman, déterminer, à une température de $10K$, le nombre de niveaux de l'oscillateur ayant une population significative (la constante de Boltzman vaut $k = 8,6.10^{-5}\ eV/K$).

Q5. Quelle est la longueur d'onde d'absorption de rayonnement électromagnétique entre deux niveaux successifs ?

2 L'oscillateur harmonique en deux dimensions

On s'intéresse désormais au mouvement *en deux dimensions* d'un électron dans la boîte quantique (mouvement plan dans une boîte de hauteur négligeable). L'électron est alors décrit par une fonction d'onde $\psi(x, y, t)$ telle que $|\psi(x, y, t)|^2$ représente la probabilité de présence de l'électron à l'instant t, dans un carré élémentaire $dx \cdot dy$. On suppose que le potentiel effectif vu par un électron dans une boîte est :

$$V(x, y) = V_x(x) + V_y(y)$$

avec $V_x(x) = \frac{1}{2}m^*\omega^2x^2$ et $V_y(y) = \frac{1}{2}m^*\omega^2y^2$. On note $H^0 = H_x^0 + H_y^0$ l'hamiltonien de l'électron, avec :

$$H_x^0 = \frac{P_x^2}{2m^*} + V_x(x) \text{ et } H_y^0 = \frac{P_y^2}{2m^*} + V_y(y)$$

On rappelle que les composantes x et y de l'opérateur *quantité de mouvement* s'écrivent : $P_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ et $P_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$.

Q6. Soit $f_{n_x}(x)$ un état stationnaire de H_x^0 d'énergie E_{n_x}, $g_{n_y}(y)$ un état stationnaire de H_y^0 d'énergie E_{n_y}. Montrer que $\varphi_{n_x,n_y}(x, y) = f_{n_x}(x)g_{n_y}(y)$ est état propre de H^0, et déterminer la valeur du niveau d'énergie E_{n_x,n_y} correspondant, en fonction de $\hbar$, ω, n_x et n_y.

On note désormais E_N les niveaux d'énergie de l'oscillateur bidimensionnel, avec $E_N = \hbar\omega(N + 1)$.

Q7. Exprimer N en fonction de n_x et n_y. Quel est, en fonction de N, le degré de dégénérescence du niveau E_N ?

3 États stationnaires de moment cinétique parfaitement déterminé

Afin d'alléger la notation, on utilise désormais la notation de Dirac $|n_x, n_y\rangle$ pour noter un état stationnaire $\varphi_{n_x,n_y}(x, y)$ de H^0.

On s'intéresse désormais au moment cinétique orbital de l'électron dans la boîte quantique. On admet que la composante sur l'axe vertical Oz de l'observable de *moment cinétique* est définie par l'opérateur $L_z = XP_y - YP_x$.

Q8. Déterminer le résultat de l'action de l'opérateur L_z sur l'état $|0, 0\rangle$. Montrer également que $L_z\,|0, 1\rangle = -i\hbar\,|1, 0\rangle$, et $L_z\,|1, 0\rangle = i\hbar\,|0, 1\rangle$.

Q9. Les états $|0,0\rangle$, $|0,1\rangle$ et $|1,0\rangle$ ont-ils un moment cinétique (selon l'axe Oz) parfaitement déterminé ? Si oui, indiquer (pour les états concernés) le résultat que l'on obtiendrait avec certitude lors d'une mesure de L_z.

On admet qu'il existe une base de vecteurs propres commune à H^0 et L_z, *i.e.* telle qu'on ait *simultanément*, pour un vecteur $|\varphi\rangle$ de cette base :

$$H^0 |\varphi\rangle = E_N |\varphi\rangle \text{ et } L_z |\varphi\rangle = \ell_z |\varphi\rangle$$

Q10. Montrer qu'un tel état possède une énergie et un moment cinétique (selon Oz) parfaitement déterminés, et indiquer les valeurs correspondantes.

On rappelle que les états $|\varphi\rangle$ d'énergie E_N appartiennent nécessairement au sous-espace engendré par les états stationnaires $|n_x, n_y\rangle$ d'énergie E_N.

Q11. En déduire, en fonction de N, le nombre maximal de valeurs différentes de moment cinétique que l'on peut mesurer. On s'inspirera du résultat de la question 7.

On cherche en particulier *tous* les états $|\varphi\rangle$ d'énergie $E_1 = 2\hbar\omega$ (premier niveau excité).

Q12. Exprimer la matrice de L_z dans la base des états stationnaires de H^0 restreinte aux états d'énergie E_1. On prendra soin d'indiquer l'ordre dans lequel on range les vecteurs dans cette base.

Q13. Montrer que L_z admet deux vecteurs propres, à savoir $\frac{|1,0\rangle + i|0,1\rangle}{\sqrt{2}}$, et $\frac{|1,0\rangle - i|0,1\rangle}{\sqrt{2}}$, associés aux valeurs propres $\pm\hbar$. On indiquera quelle valeur propre correspond à chaque vecteur propre.

4 Boîte quantique dans un champ magnétique

On applique sur la boite quantique un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$ parallèle à l'axe Oz. On admettra qu'en présence du champ magnétique, l'hamiltonien de l'électron dans la boite s'écrit :

$$H^B = H^0 + \frac{m^*\omega_c^2}{8}(x^2 + y^2) + \frac{\omega_c L_z}{2}$$

où $\omega_c = qB/m^*$ est la *pulsation cyclotron.*

Q14. On pose $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2/4}$. Montrer que H^B peut se réécrire comme la somme d'un hamiltonien d'oscillateur harmonique bidimensionnel de pulsation à préciser, et d'un terme faisant intervenir le moment cinétique L_z.

Q15. En déduire les niveaux d'énergie en présence du champ magnétique en fonction de Ω, ω_c et ℓ_z.

On s'intéresse à nouveau, comme en Q12/Q13, au premier niveau excité, mais cette fois en présence du champ B.

Q16. Quelles valeurs peut prendre ℓ_z dans ce cas ?

Q17. Monter que le niveau E_1, défini précédemment en l'absence de champs se scinde, en présence du champ magnétique, en plusieurs sous-niveaux d'énergie, et déterminer leur valeur en fonction de Ω et ω_c.

Q18. Donner une approximation au premier ordre de ces sous-niveaux d'énergie en champs magnétique faible, et tracer ces sous-niveaux en fonction de B.

5 Etude expérimentale

On admettra que les trois premiers niveaux d'énergie en présence d'un champ magnétique extérieur s'écrivent :

$$E_0 = \hbar\Omega,\ E_- = 2\hbar\Omega - \frac{\hbar\omega_c}{2},\ E_+ = 2\hbar\Omega + \frac{\hbar\omega_c}{2}$$

où Ω et ω_c sont définis dans la partie 4 (dont pourra admettre les résultats). On note $|u_0\rangle, |u_-\rangle, |u_+\rangle$ les trois états propres correspondants, de moments cinétiques respectifs $\ell_z = 0, -\hbar, +\hbar$.

L'étude des niveaux d'énergie d'un électron dans une boîte quantique se fait par spectroscopie : on mesure l'absorption d'un faisceau lumineux en fonction de la fréquence.

Q19. A quelles fréquences peuvent apparaître, a priori, des pics d'absorption ?

Q20. A une température de 10K, on constate que seul le niveau $|u_i\rangle = |u_0\rangle$ contribue de manière significative au signal d'absorption. Justifier ce fait à partir du résultat de la partie 1.

Q21. La valeur expérimentale des fréquences des deux premiers pics d'absorption d'une boîte quantique est présentée sur la figure 1, pour différentes valeurs du champ magnétique. Vérifier que le modèle développé dans la partie 4 permet de retrouver la pente de ces deux courbes pour des valeurs suffisamment élevées de B, mais pas le comportement à l'origine.

6 Interaction avec une onde électromagnétique

Cette partie ne nécessite que les résultats des parties 2 et 3, que l'on pourra admettre.

Dans cette partie, le champ magnétique extérieur B est nul. On envoie sur la boîte quantique une onde électromagnétique de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z,\ k > 0$ (perpendiculaire à la boîte), de pulsation ω_e, polarisée circulairement à gauche. On néglige l'effet du champ magnétique de l'onde. Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(\cos(\omega_e t)\ \mathbf{e}_x + \sin(\omega_e t)\ \mathbf{e}_y)$$

Figure 1: Fréquence $\nu = \omega/2\pi$ des deux premiers pics d'absorption d'une boîte quantique, en fonction du champ magnétique B.

Q22. Déterminer l'énergie potentielle $V^p(x, y, t)$ dont dérive $\mathcal{E}(t)$.

On s'intéresse à la probabilité de transition, sous l'effet du champ électrique, de l'état fondamental $|0, 0\rangle$ vers l'un des états excités $\frac{|1,0\rangle + i|0,1\rangle}{\sqrt{2}}$, et $\frac{|1,0\rangle - i|0,1\rangle}{\sqrt{2}}$ (question Q13), en traitant $V^p(x, y, t)$ comme une petite perturbation.

Q23. En utilisant la formule des perturbations dépendant du temps, montrer qu'une des deux probabilités de transition est nulle ; on ne calculera pas les intégrales correspondant aux produits scalaires, au contraire on exploitera les symétries du problème.

On admet qu'une onde électromagnétique polarisée circulairement à gauche (respectivement à droite) est ¡¡ associée ¿¿ à un photon dont la projection du spin sur l'axe de propagation est égale à $+\hbar$ (respectivement $-\hbar$). Du point de vue corpusculaire, on considère l'absorption d'une onde électromagnétique par l'électron comme une collision (photon + électron $\rightarrow$ électron).

Q24. Montrer que la transition interdite violerait effectivement la conservation du moment cinétique, et que la transition permise la respecte.

Q25. Que se passerait-il si l'onde incidente était polarisée rectilignement ?