

Electronique et Signal pour la Musique - 2021

TP : simulation du timbre de quelques instruments à corde pincée ou frappée

8 mars 2021

Qu'il s'agisse de la guitare ou du piano (cf figures 1 et 2), les cordes de ces instruments ne rayonnent pas suffisamment d'énergie par elles-mêmes, du fait de leur petite surface. C'est donc le couplage de chaque corde à la table d'harmonie (via le chevalet), beaucoup plus étendue spatialement, qui permet à l'instrument de rayonner efficacement de l'énergie acoustique. En pratique, une extrémité de la corde est attachée à la cheville d'accord (permettant d'accorder l'instrument), tandis que l'autre extrémité est reliée au chevalet, lui-même collé à la table d'harmonie.

Le timbre de l'instrument dépend tout d'abord de la façon dont est excitée la corde. Dans le cas des instruments à corde pincée, un plectre (clavecin), un mediator (guitare folk ou électrique) ou le pouce du guitariste (guitare classique) réalisent l'excitation en déplaçant la corde de sa position d'équilibre à l'instant initial. Dans le cas des instruments à corde frappée (piano), un marteau communique à la corde une quantité de mouvement initiale. Ces deux cas de figure, nous le verrons dans ce travail, modifient fondamentalement le timbre.

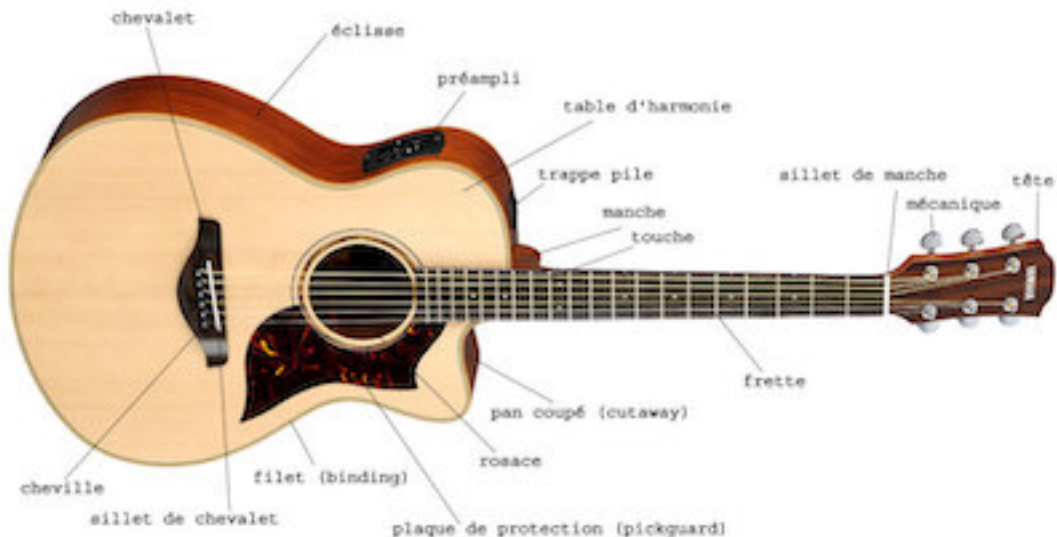


FIGURE 1 – Elements constitutifs d'une guitare "folk"

L'objectif de ce TP est donc notamment d'étudier les propriétés spectrales (=le timbre) d'une corde en fonction de la manière dont elle est attaquée. Outre l'étude théorique, il faudra écrire plusieurs fragments de code matlab ou Python permettant :

- de visualiser la propagation d'une onde sur une corde pour une condition initiale fixée
- de générer par synthèse additive un timbre d'instrument à corde pour deux types de condition d'attaque (pincement ou marteau, respectivement pour la guitare et le piano), avec des profils ajustables afin de pouvoir expérimenter.

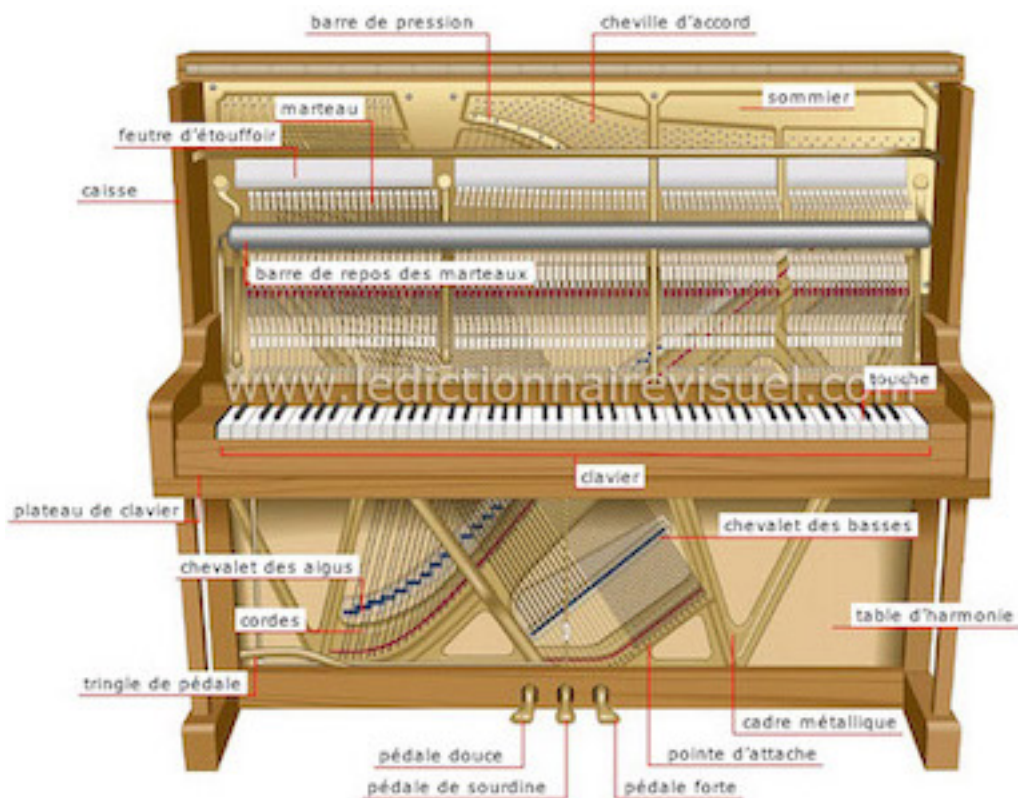


FIGURE 2 – Elements constitutifs d'un piano droit

Les diverses parties sont relativement indépendantes, et il est possible de les traiter à peu près dans n'importe quel ordre.

1 Propagation d'une onde sur une corde pincée (programmation)

Le profil initial de la corde est le profil d'amplitude triangulaire indiqué figure 1. La propagation de l'onde sur la corde est modélisée de la façon suivante :

- sur la corde peuvent se propager une onde progressive $y(x - ct)$ de célérité c , et une onde régressive $y(x + ct)$ de célérité $-c$, où $y(x \pm ct)$ représente l'amplitude à l'abscisse x et à l'instant t ;
- l'amplitude totale résultant de la superposition de ces deux ondes est $Y(x, t) = [y(x - ct) + y(x + ct)]/2$;
- aux extrémités (chevalet et silet de manche pour une guitare), il y a réflexion telle que l'amplitude totale $y(x + ct) + y(x - ct) = 0$ en $x = 0$ et $x = L$ à tout instant. Ceci est illustré par la partie en pointillés sur la figure 1.

Ecrire un programme qui :

- génère et affiche le profil initial de la corde (paramètre a ajustable).

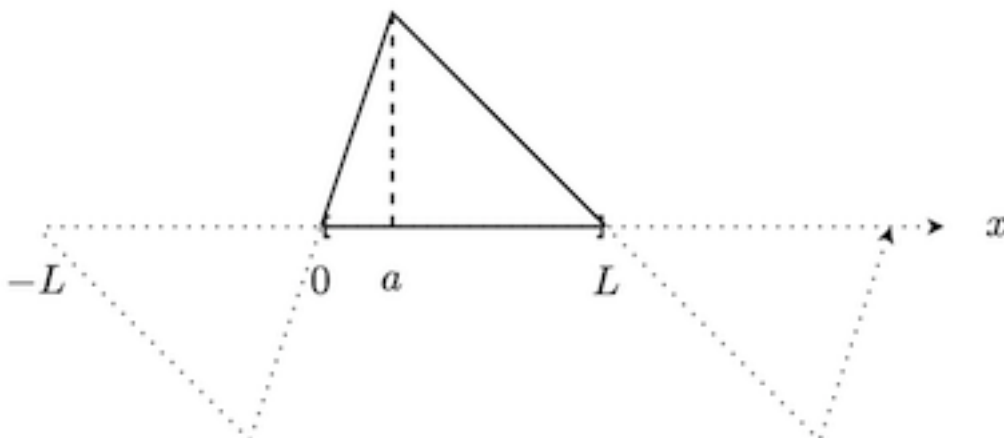


FIGURE 3 – Profil de la corde pincée à $t = 0$ entre 0 et L . La partie en pointillée indique le profil de l'onde réfléchie sur les extrémités. On vérifiera que ce profil garantit bien que $Y(x, t) = 0$ à chaque extrémité pour tout t .

- calcule les ondes progressives et régressives à n'importe quel instant t ;
- génère une animation du profil de la corde à tout instant t en superposant les propagations progressive et régressive.

En Python on pourra utiliser le module `matplotlib.animation`.

2 Rôle du chevalet pour l'efficacité acoustique de l'instrument (étude théorique)

Nous avons affirmé qu'au niveau du chevalet (en $x = L$) il y a réflexion parfaite, i.e., $Y(L, t) = 0$. En pratique, c'est évidemment faux puisque si c'était le cas, le chevalet serait infiniment rigide et ne pourrait transmettre aucune énergie à la table d'harmonie. Pour intégrer le rôle du chevalet dans l'équation d'onde, il faut reprendre l'équation d'onde mais en tenant compte de l'impédance du chevalet. Celui-ci est alors modélisé comme une masse m fixée à un ressort de raideur k (ressort dont une extrémité est solidaire de la table d'harmonie).

Q1. En régime harmonique, l'impédance mécanique d'un système mobile à la vitesse v et soumis à une force F est donnée par $Z_m = F/v$. En écrivant le principe de la dynamique en régime harmonique, déterminer l'impédance du chevalet.

On voit qu'on a une chaîne d'oscillateurs couplés : la corde est couplée au chevalet via son impédance mécanique d'extrémité, et le chevalet est lui-même couplé à la table d'harmonie, qui est elle-même finalement, couplée à l'air ambiant via son impédance de rayonnement. En première approximation, et parce qu'on a somme toute peu de temps dans le cadre de cette option, on va supposer ici que $Z_m(\text{chevalet}) = R$ où R est une constante réelle.

Q2. On peut justifier ce choix par le fait que de l'énergie doit "sortir" de la corde vers le chevalet. Sauriez-vous dire pourquoi cela implique que Z_m soit

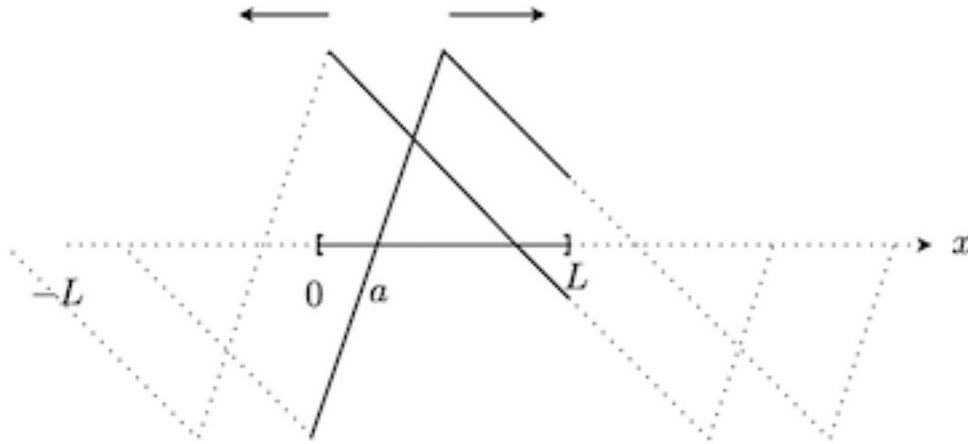


FIGURE 4 – Illustration de la propagation des deux ondes à $t > 0$.

réelle? Une piste consiste à calculer effectivement la puissance mécanique transmise par la corde au chevalet.

On va développer ici le même type d'approche que pour la propagation d'onde dans un tube : la notion d'impédance ramenée. En chaque point de coordonnée x de la corde on peut en effet définir une impédance mécanique $Z_m(x) = T_y(x)/v(x)$ où T_y est la composante "verticale" de la tension exercée sur un élément infinitésimal de corde au point d'abscisse x .

On rappelle que la mise en équation via le principe de la dynamique (cf. figure 5) donne l'équation :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

où μ est la masse linéique de la corde.

Q3. Déterminer cette impédance dans le cas où seule une onde progressive monochromatique se propage sur la corde. Il s'agit de l'impédance caractéristique de la corde, notée Z_c par la suite, et qui dépend de la célérité des ondes sur la corde et de la masse linéique de la corde. Que devient-elle pour une onde régressive ?

Q4. Que devient cette impédance lorsqu'on est en présence d'un régime d'onde stationnaires (onde progressive + onde régressive) ? Montrer que la formule donnant $Z(x)$ en x en fonction de $Z(0)$ à une extrémité est similaire à celle du cours pour la propagation dans un tube.

Q5. On cherche des solutions de l'équation de propagation (équation de D'Alembert) sous forme d'ondes stationnaires de la forme $y(x, t) = f(x)e^{st}$ où s est un nombre complexe. Montrer que $f(x) = A \sinh(sx/c)$ et que $2Ls = c \log \frac{R-Z_c}{R+Z_c}$ (on montrera le résultat intermédiaire $\tanh(sL/c) = -Z_c/R$).

Q6. On pose $s = \alpha + j\omega$. Dans le cas où $R > Z_c$ (cas du piano), calculer les valeurs possibles de ω ainsi que α en fonction de c , L , R et Z_c . La justesse de la corde change-t-elle lorsqu'on inclue le chevalet ? Que représente α ?

Q7. Tout pianiste (ou guitariste) a déjà remarqué que les graves s'atténuent moins vite que les aigus. Est-ce corroboré par les résultats précédents ? Estimer le temps caractéristique d'atténuation de l'onde en fonction de la fréquence fondamentale, R et Z_c .

En savoir plus : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00662740/> (thèse de J. Chabassier : Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques)

3 Spectre sonore d'une corde - rôle des conditions initiales (étude théorique)

On considère une corde de longueur L attachée à ses deux extrémités. On note c la célérité des ondes transversales pouvant se propager sur la corde, et $y(x, t)$ le déplacement de la corde à l'abscisse x et à l'instant t par rapport à la position d'équilibre.

Q8. Compte-tenu des conditions aux limites, montrer que la solution générale de toute oscillation libre s'écrit :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t] \sin k_n x$$

et préciser l'expression de ω_n et k_n .

Q9. Montrer que la connaissance des conditions initiales du mouvement de vibration, soit $y(x, 0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$, permet de calculer les coefficients a_n et b_n . On rappelle que :

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}$$

4 Corde de piano : synthèse sonore (programmation)

À l'instant initial $t = 0^-$, la corde est immobile dans sa position d'équilibre. Elle est frappée avec un petit marteau de largeur $e \ll L$ situé entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$, qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. On fait l'approximation que la vitesse initiale de chaque point de la corde à l'instant $t = 0^+$ est modélisée par un créneau de vitesse :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = u \text{ pour } a \leq x \leq a + e$$

Q10. Déterminer les coefficients a_n et b_n .

Q11. Montrer que le choix de a permet de sélectionner les harmoniques et leur amplitude.

Q12. Que faut-il faire pour supprimer l'harmonique (dissonante) $n = 7$? Faire un dessin de la corde et expliquer.

Q13. Dans le cas $a = L/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis ? Déterminer l'énergie de vibration E_n (i.e. énergie cinétique) dans le mode n . Quels phénomènes limitent en fait la création des modes de rang élevé pour des instruments à cordes frappées ?

Q14. Quel est l'effet de la largeur e du marteau ? (en pratique $e \sim 1\text{cm}$ mais que se passe-t-il si e est beaucoup plus grand ?).

Afin de synthétiser ce son de piano, nous allons utiliser une technique de synthèse sonore consistant à générer le son par **sommation** de formes d'ondes élémentaires. Ici, il s'agira d'ondes sinusoïdales amorties (cf partie 2 : couplage au chevalet) du type $y_n(t) = A_n e^{-t/\tau_n} \sin(\omega_n t + \phi_n)$, qui correspondent au fonctionnement physique "réel" de ce type d'instrument (l'amortissement provenant de la dissipation d'énergie mécanique, soit dans la structure de l'instrument, soit par rayonnement). Le spectre varie alors au cours du temps.

Q15. Ecrire un programme permettant de générer un son de piano par sommation de l'ensemble de ses harmoniques de rang n dans la bande audible (termes en sinus et en cosinus, amortissement à estimer en fonction de la partie 2).

Quelques données : les 88 notes du piano s'échelonnent du La0 (28Hz) au Do8 (4200Hz). Pour $f = 262\text{Hz}$, on a $L = 65\text{cm}$.

5 Corde de clavecin

Pour le clavecin, la corde est pincée (à l'abscisse a) et lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale. On admet que le profil initial de la corde est triangulaire.

Q16. Déterminer les coefficients a_n et b_n et en déduire l'énergie de vibration E_n .

Q17. Comparer les simulations des spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin lorsque $a = L/2$. Dans quel cas le timbre est-il plus "cristallin" ?

6 Corde de guitare

Le pincement de la corde peut être réalisé de manière plus délicate que précédemment ; lorsqu'il est effectué avec le doigt comme pour une corde de guitare classique (ou celle d'une harpe), les conditions initiales plus régulières suivantes sont adoptées :

$$y(x, 0) = \frac{4h}{L^2} x(L - x)$$

Q18. Reprendre les calculs et simulations. Conclure quant à la pureté (i.e. la monochromaticité) du timbre dans le cas de la guitare.

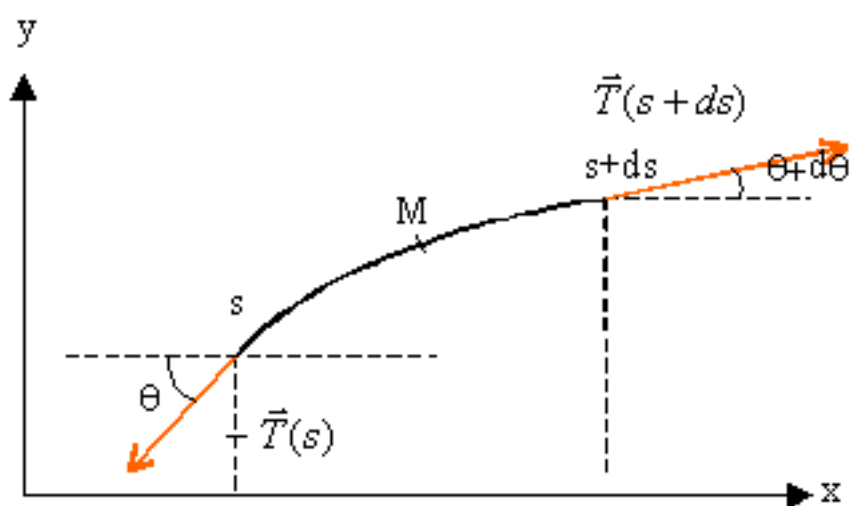


FIGURE 5 – Mise en équation de la propagation sur une corde sans raideur : T et $v = dy/dt$ constituent les deux variables conjuguées ; T est tangent à chaque instant à la corde, la composante de T selon x étant réputée constante et égale à la tension imposée par la cheville d'accord.